

Ev. flytt av datalogitentan

ALLA deltagare på kursen måste
skriva på att de godkänner flytten.

Föreslaget nytt datum:

17 mars
14⁰⁰ - 18⁰⁰

Grä

$$1. e^{3x+y} = 1 + 3x + y + \frac{1}{2}(9x^2 + 6xy + y^2) + \\ + \frac{1}{3!}(27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3) + \\ + \frac{1}{4!}(81x^4 + 108x^3y + 54x^2y^2 + 12xy^3 + y^4) + \\ + O(|(x,y)|^5)$$

$$2. f(1,2) = -3 \text{ min}$$

$$f(-2,-1) = 3 \text{ max}$$

$$3. (y,x) = \lambda(4x, 6y) \quad f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \quad \begin{matrix} \text{max} \\ \text{min} \end{matrix}$$

Öv

$$\begin{aligned}
 1. \quad \cos(x-y) &= 1 - \frac{(x-y)^2}{2!} + \frac{(x-y)^4}{4!} + O(|(x,y)|^6) \\
 &= 1 - \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2) + \frac{1}{4!}(x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 \\
 &\quad - 4xy^3 + y^4) + O(|(x,y)|^6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad f(3,2) &= 3 \quad \text{max} \\
 f(-2,3) &= -2 \quad \text{min}
 \end{aligned}$$

$$3. \quad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \begin{matrix} + \text{ max} \\ - \text{ min} \end{matrix}$$

Össa

$$\begin{aligned}
 1. \quad \sin(x+2y) &= x+2y - \frac{(x+2y)^3}{3!} + O(\|(x,y)\|^5) \\
 &= x+2y - \frac{1}{3!} (x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3) + O(\|(x,y)\|^5)
 \end{aligned}$$

$$2. \quad f(2,4) = 24 \quad \text{max}$$

$$f(2,-2) = 0 \quad \text{min}$$

$$3. \quad f\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \begin{array}{l} + \text{ max} \\ - \text{ min} \end{array}$$

Minstakvadrat metoden

Minstakvadrat metoden handlar om att anpassa en given typ av kurva till mätdata.

Ex(8.5.1): Vid ett försök kastades en sten från en hög byggnad och vid olika nivåer mätte man dess passertider:

nivå(meter)	40	30	20	10	5
tid (s)	0,42	1,02	2,22	2,67	2,85

Om allt hade fungerat perfekt
skulle man ha sambandet

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{g t^2}{2}$$

$$\begin{cases} y_0 + 0,42 v_0 - 0,42^2 \frac{g}{2} = 40 \\ y_0 + 1,62 v_0 - (1,62)^2 \frac{g}{2} = 30 \\ y_0 + 2,77 v_0 - 2,77^2 \frac{g}{2} = 20 \\ y_0 + 2,67 v_0 - 2,67^2 \frac{g}{2} = 10 \\ y_0 + 2,85 v_0 - 2,85^2 \frac{g}{2} = 5 \end{cases}$$

men alla experiment är ju
beräknade med mät fel så
det här gäller inte exakt.

I stället vill vi att y_0, v_0, g
ska väljas så att felet blir
så litet som möjligt. Systemet
blir på matrisform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,47 & -0,47^2 \\ 1 & 1,62 & -1,62^2 \\ 1 & 2,22 & -2,22^2 \\ 1 & 2,67 & -2,67^2 \\ 1 & 2,85 & -2,85^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Försöker vi lösa systemet
 finner vi alltså att det saknas
 lösningar. Istället vill vi
 minimera $F(x) = \|Ax - b\|^2$.

Eftersom $\|Ax - b\|^2 = (Ax - b)^T (Ax - b)$
 får vi om vi deriverar

$$F(x) = x^T A^T A x - x^T A^T b - b^T A x + b^T b$$

villkoret $0 = 2 \vec{e}_k^T A^T A x_0 + \cancel{x_0^T A^T \vec{e}_k} - \cancel{2 \vec{e}_k^T A^T b} - \cancel{b^T A \vec{e}_k}$

$$\Rightarrow 0 = \vec{e}_k^T A^T A x_0 - \vec{e}_k^T A^T b$$

$$\Rightarrow \vec{0} = A^T A x_0 - A^T b$$

$$\Rightarrow A^T A x_0 = A^T b$$

normal equations

$$\left(x = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \\ g \end{pmatrix} \right)$$

Sats: (Minsta kvadratmetoden)

För varje matris A och
kolonnvektor b har normalkv

$$A^T A x_0 = A^T b$$

minst en lösning. För en sådan
lösning gäller att den är
minimipunkt till $F(x) = \|Ax - b\|^2$

$$\text{Ex 8.20 a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.22

normal ekvation -

$$A^T A x = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$