

Ex: Bestäm den linje $y=kx+l$ som
i minsta kvadrat mening, bäst
anpassar till punkterna
 $(0,0), (1,2), (2,2), (4,3)$.

$$\begin{cases} 0k + l = 0 \\ 1k + l = 2 \\ 2k + l = 2 \\ 4k + l = 3 \end{cases}$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}} \overset{*}{\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}} = \overset{b}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

normal ekvationen:

$$A^T A x_0 = A^T b \quad x_0 \text{ minpunkt}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -7 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 23 \\ 21 \end{pmatrix}$$

SVAR: den linje som bäst anpassar
blir $y = \frac{23}{35}x + \frac{21}{35}$.

Sats: Lösningen är unik om
och endast om kolonnvektorerne
i A är linjärt oberoende. Lösningen
ges då av $x = (A^T A)^{-1} A^T b$.

$n \times n$ $n \times n$
 $n \times n$

Bevis: Att kolonnvektorerna i A är
linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ (per def)

$Ax=0$ bara har lösningen $x=0$

$\Leftrightarrow A^T Ax=0$ bara har den
triviala lösningen $\Leftrightarrow A^T A$
($x=0$)

är inverterbar.

Koordinattransformationer

Låt $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ och $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ vara två baser i planet. Vi kan uttrycka $\vec{f}$ -basen i $\vec{e}$ -basen:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

↑ transformation
matris
från
 $\vec{e}$ till
 $\vec{f}$

Transformationsmatrisen från $\vec{f}$ till $\vec{e}$ blir C^{-1} . Om baserna antas vara ON-baser blir det speciellt enkelt för då blir $C^{-1} = C^T$.

$$\begin{aligned} 1 &= \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_1 = (c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2) \cdot (c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2) \\ &= c_{11}^2 + c_{21}^2 \\ 1 &= \vec{f}_2 \cdot \vec{f}_2 = c_{12}^2 + c_{22}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = (c_{11} \vec{e}_1 + c_{21} \vec{e}_2) \cdot (c_{12} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2) \\
 &= c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2^2 \quad C^T C &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} c_{11}^2 + c_{21}^2 & c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} \\ c_{12}c_{11} + c_{22}c_{21} & c_{12}^2 + c_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C^T = C^{-1} \quad C \text{ kallas ON-matrix}$$

Ex: Spelling : linjen $x=y$
tar standardbasen $\vec{e}: \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$
till basen $\vec{f}: \{\vec{e}_2, \vec{e}_1\}$. Transformations
matrisen blir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det är klart att de är ON-baser
och vi har

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Koordinater

En godtycklig vektor $\vec{X}$ kan uttryckas i både baserna $\vec{X}_e$

$$\vec{X} = x_{1e} \vec{e}_1 + x_{2e} \vec{e}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \begin{pmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{pmatrix}$$

$$= x_{1f} \vec{f}_1 + x_{2f} \vec{f}_2 = (\vec{f}_1, \vec{f}_2) \begin{pmatrix} x_{1f} \\ x_{2f} \end{pmatrix}$$

men $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \mathbb{C} \vec{X}_f$

så vi får $\vec{X}_e = \mathbb{C} \vec{X}_f$

Det ser $\vec{x}_f = C^{-1} \vec{x}_e$ och
speciellt för ON-baser $\vec{x}_f = C^T \vec{x}_e$.

Ex: Låt $\vec{e}$ vara standardbasen
i $\mathbb{R}^2$ och $\vec{f}$ vara den man
får genom att rotera moturs
med vinkel $\frac{\pi}{2}$, dvs $\vec{f}_e = (0, 1)$, $\vec{f}_f = (-1, 0)$
Transformationsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ON-matris}$$

Låt vektorn $\vec{v}$ ha koordinaterna $(1, 4)$ i basen $\vec{e}$ då har vi

$$\vec{v}_f = C^T \vec{v}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Linjära avbildningar

Låt den linjära avbildningen A ha matris A_e i basen $\vec{e}$ och A_f i basen $\vec{f}$. Kolonnerna i A_e består ju av koordinaterna för Ae_1, Ae_2 och

och motsvarande för A_f .

$$\begin{aligned} \text{Vi har } \vec{f}_1 &= c_{11} \vec{e}_1 + c_{21} \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 &= c_{12} \vec{e}_1 + c_{22} \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{så } A\vec{f}_1 &= A(c_{11}\vec{e}_1) + A(c_{21}\vec{e}_2) = \\ &= c_{11}A\vec{e}_1 + c_{21}A\vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$A\vec{f}_2 = c_{12}A\vec{e}_1 + c_{22}A\vec{e}_2$$

$$\Rightarrow (A\vec{f}_1)_e = A_e \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}, (A\vec{f}_2)_e = A_e \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$$

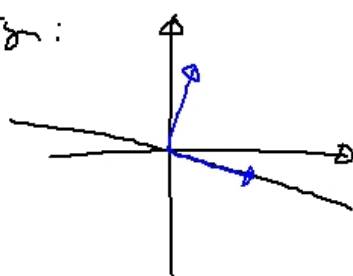
$$\Rightarrow (A\vec{f}_1)_f = C^{-1}A_e \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

$$(A\vec{f}_2)_f = C^{-1}A_e \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_f = C^{-1}A_e C$$

Ex 7.8: Bestäm matrisen för den vinkelräta projektionen på linjen med ekvation $x+7y=0$ i xy -planet.

Lös:



Låt $\vec{f}_1 = \frac{(1, 7)}{\sqrt{50}}$ och

normal

$\vec{f}_2 = \frac{(7, -1)}{\sqrt{50}}$ och

riktningsvektor

$\vec{e}$ standardbasen. Eftersom vi
har normerat $\vec{f}_1$ och $\vec{f}_2$, och $\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = 0$
blir $\vec{f}$ en ON-bas.

I den nya basen

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

det ger

$$\begin{aligned} A_c &= C A_f C^{-1} = C A_f C^T = \\ &= \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 49 & -7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diagonalisering

Speciellt enkla avbildningar
är de där matriser är diagonala.

Det är alltså viktigt att kunna
transformera till något diagonalt.

Att en matris går att diagonalisera
kan formuleras som att det finns
en bas där alla basvektorer
är egenvektorer:

$$A \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

λ kallas egenvärde

Ex: Diagonalisera matrisen $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi vill ha

$$A \vec{v} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} (A - \lambda E) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

Som har icke-triviala lösningar precis
då $\det(A - \lambda E) = 0$.

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 4 \cdot 2 = \\ = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

vilket ger egenvärdena $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$.
Vi tar sedan fram motsvarande
egenvektorer:

$$\lambda_1 = 5: \begin{pmatrix} 3-5 & 2 \\ 4 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -2u_1 + 2u_2 &= 0 \\ \Rightarrow u_1 &= u_2 \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = -1: \begin{pmatrix} 3+1 & 2 \\ 4 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{så } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Om vi nu tar $\vec{f}_1 = (1, 1)$ och $\vec{f}_2 = (1, -2)$
som ny bas får vi transformationsmatrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Föreläsning 32, sid 20

$$\begin{aligned} A_f &= C^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} C = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

/