

Ex 7.10: Bestäm eventuella
egenvärden och egenvektorer
till matrisen

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Lösning:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \end{vmatrix} = (\cos \varphi - \lambda)^2 + \sin^2 \varphi \\ &= \cos^2 \varphi - 2\lambda \cos \varphi + \lambda^2 + \sin^2 \varphi = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda &= \cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi - 1} = \\ &= \cos \varphi \pm \sqrt{-\sin^2 \varphi}\end{aligned}$$

Så om $\varphi \neq \pi n$ saknar matrisen reella egenvärden och är därför ej diagonaliserbar.

Vi kan förstå det här geometriskt för matrisen svarar mot rotation så om $\varphi \neq \pi n$ finns det inte någon vektor som tas till en parallell vektor.

Ex 7.11: Bestäm eventuella
egen värden och egenvektorer
till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning: $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = 0 \quad k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

men en vektor utgör inte
hågan bas så matrisen
gör ej att diagonalisera.

Sats: Om en $n \times n$ matris har
 n st olika reella egenvärden
så är den diagonaliserbar.
De n egenvektorena blir
linjärt oberoende.

Ex: Beräkna A^3 då

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Vi säger igen att

$$-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{så} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^3 = \left(\begin{pmatrix} \text{C} \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{D} \\ 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{C}^{-1} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)^3$$

$$\cancel{(\text{C D C}^{-1})} \cancel{(\text{C D C}^{-1})} \cancel{(\text{C D C}^{-1})} = \text{C D}^3 \text{C}^{-1}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & 42 \\ 84 & 41 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sats(spektralsatsen) En matris kan diagonaliseras med hjälp av en ÖN-matris om och endast om den är symmetrisk.

Om en matris A kan diagonaliseras
med hjälp av en ON-matris
måste den vara symmetrisk:

$$C^T A C = \overset{\text{diagonal}}{D} = D^T = C^T A^T C$$

$$\Rightarrow A = A^T, \text{ d.s. } A \text{ symmetrisk.}$$

transformations
matrisen

Andragsredskurvor

Om konstanterna A, B och C inte alla är noll så beskriver ekvationen

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

en andragsredskurva.

Vi börjar med att titta på fallet

$$B=0: \quad Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Kvadratkomplettering ger:

Om $A \neq 0, C \neq 0$:

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 + F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C} = 0$$

Med transformationen

$$\begin{cases} \xi = x + \frac{D}{A} \\ \eta = y + \frac{E}{C} \end{cases} \quad \text{och} \quad G = F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{C}$$

får vi

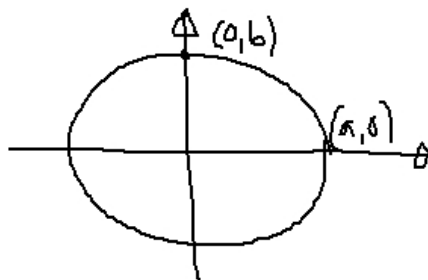
$$A\xi^2 + C\eta^2 + G = 0$$

i) $AC > 0$ (A, C samma tecken)

G motsatt tecken ger en ellips

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\text{där } a^2 = -\frac{G}{A}, b^2 = -\frac{G}{C}$$



$G=0$ ger en punkt

$$A\beta^2 + C\eta^2 = 0 \Rightarrow (\beta, \eta) = (0, 0)$$

G sammattecken får vi ingenting.

$$A\beta^2 + C\eta^2 + G = 0$$

skapar reella lösningar.

Ex: Vilken slags kurva
representerar ekvationen:

$$2x^2 + y^2 - 3x + 2y - 4 = 0$$

Lösni: Kvadratkomplettering ger

$$2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + (y + 1)^2 - 4 - \frac{9}{8} - 1 = 0$$

$$2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \frac{49}{8} = 0$$

en ellips.

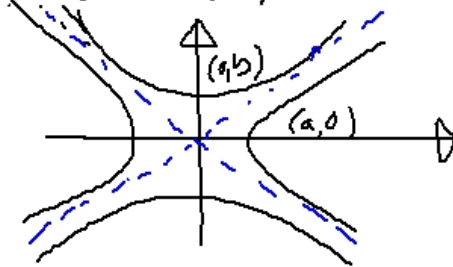
Om $AC < 0$ (motsatt tecken)

$G \neq 0$: Hyperbel

(anta att $A > 0 > C$, $G < 0$)

$$-a^2 = \frac{G}{A}, \quad b^2 = \frac{G}{C}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0$$



$$G=0: \quad Ax^2 + Cy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow A=a^2, C=-b^2$$

$$(ax+by)(ax-by)=0$$

det är två skärande linjer

$$\text{Om } AC=0, C=0:$$

Vi kan då bara kvadratkomplettera

$$\text{i } x: \quad Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

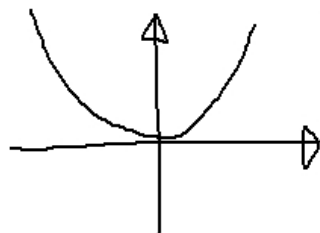
$$\Leftrightarrow A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + 2Ey + \underbrace{F - \frac{D^2}{A}}_H = 0$$

$$A \zeta^2 + 2E y + H = 0$$

$E \neq 0$ (Parabel):

Vi delar med $2E$ och
sätter vi $\eta = y + \frac{H}{2E}$

$$A \zeta^2 + 2E \eta = 0 \Leftrightarrow \eta = -\frac{A}{2E} \zeta^2$$



Om $E=0$: (parallella linjer om $\frac{H}{A} < 0$)

$$A\zeta^2 + H = 0 \Leftrightarrow \zeta^2 = -\frac{H}{A}$$

Om $\frac{H}{A} > 0$ får vi ingenting.

Om nu $B \neq 0$ visar det sig
att vi får samma fall men
villkoren ges av $AC - B^2$ istället
för bara AC . För att se det
ska vi göra en koordinattrans-
formation som eliminerar xy termen.
Ekvationen

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

kan skrivas med hjälp av matriser:

$$(x, y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(D, E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

$$X^T K X + 2 l^T X + F = 0$$

Vi vill alltså diagonalisera K .
Eftersom K är symmetrisk vet vi att
vi kan diagonalisera den med en
ON-transformation.

Ex: Vilken ^{typ av} kurva svarar
mot ekvationen
 $2x^2 + 6xy + 2y^2 - 3x + 2y - 4 = 0?$

Lösning: $K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $l = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

eigenvärden:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = (2-\lambda-3)(2-\lambda+3)$$

$$= (-1-\lambda)(5-\lambda) \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

eigenvektorer:

$$\lambda = -1: \begin{pmatrix} 2 - (-1) & 3 \\ 3 & 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{så} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dus normerat} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 5: \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{normerat} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Det ger transformationsmatrisen

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

så med $x = Cx_f$

$$x_f^T \underbrace{C^T K C}_{K_f} x_f + 2 \underbrace{l^T C}_{l_f^T} x_f + F = 0$$

$$x_f^T K_f x_f + 2 l_f^T x_f + F = 0$$

$$H \bar{z} r \quad \bar{z} r$$

$$K_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$l_f = \mathbb{1}^T l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Om } x_f = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \text{ för vi}$$

$$-\xi^2 + 5\eta^2 - \frac{5}{\sqrt{2}}\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\eta - 4 = 0$$

Kvadratkomplettering ger

$$-\left(\underbrace{\xi + \frac{5}{2\sqrt{2}}}_{\xi'}\right)^2 + 5\left(\underbrace{\eta - \frac{1}{10\sqrt{2}}}_{\eta'}\right)^2 - 4 + \frac{25}{8} - \frac{1}{40} = 0$$

$$-(\xi')^2 + 5(\eta')^2 + \frac{-36}{40} = 0$$

$$-(\xi')^2 + 5(\eta')^2 - \frac{9}{10} = 0$$

en hyperbel. Medelpunkten för hyperbeln blir $\left(-\frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{10\sqrt{2}}\right)$ i de nya koordinaterna, ξ_0, η_0 i de gamla

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{25}{10\sqrt{2}} \\ \frac{1}{10\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{5} \\ \frac{13}{10} \end{pmatrix}$$

Huvudaxlarna går i riktningarna
 $(1, -1)$ och $(1, 1)$, dvs i
egenvektorernas riktningar.