Andragradsytor

Den mängd av punkter i rummet som uppfyller en ekvation av typ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 +$$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0$$

där A, B, C, D, E, F inte alla är noll kallas en andragradsyta.

Exempel: Huvudaxelform

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 \pm \left(\frac{z}{c}\right)^2 = \pm 1 \text{ eller } 0$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \pm 1 \text{ eller } 0$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \pm 1 \text{ eller } 0$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = z$$

Reduktion till huvudaxelform

Ekvationen kan skrivas med matriser

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}, \quad \ell = \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(G, H, I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + J = 0$$

$$\mathbb{x}^T \mathbb{K} \mathbb{x} + 2\ell^T \mathbb{x} + J = 0$$

som för andragradskurvor går reduktionen ut på att transformera $\mathbb{K}$ till en diagonal-matris. Eftersom $\mathbb{K}$ är symmetrisk säger spektralsatsen att detta är möjligt att göra med en ON-transformation.

Ex 8.10: Vilket slags yta svarar mot ekvationen

$0xy$ $\quad 5x^2 - 8xz + 1y^2 + 8yz + 3z^2 + 6x - 2z = 1$?

Lösn:

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$l = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

egenvärden:

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ -4 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - -16(1-\lambda) - 16(5-\lambda) =$$

$$= (5-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - 32(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda - 27) \qquad \lambda_1 = 3$$

$$\lambda^2 - 6\lambda - 27 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{9+27} =$$

$$= 3 \pm 6$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 9, \lambda_3 = -3.$$

egen vektorer:

$\underline{\lambda = 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ normerad $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = 9}$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & 4 \\ -4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = -3}$:
$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 8w_1 - 4w_3 = 0 \\ 4w_2 + 4w_3 = 0 \\ -4w_1 + 4w_2 + 6w_3 = 0 \end{cases}$$

1 $\Rightarrow w_3 = 2w_1$

2 $\Rightarrow w_2 = -w_3 = -2w_1$

3 $-4w_1 - 8w_1 + 12w_1 = 0$

$\Rightarrow w_1$ godtycklig

tex 1

normerat $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Transformationsmatris

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{K}_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\ell_f = \mathbb{C}^T \ell = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi får så

$$3\xi^2 + 9\eta^2 - 3\zeta^2 + 2\left(\frac{5}{3}\xi + \frac{8}{3}\eta + \frac{1}{3}\zeta\right) - 1 = 0$$

Kvadratkomplettering ger

$$3\Big(\underbrace{\xi+\frac{5}{9}}_{\xi'}\Big)^2-\frac{25}{27}+9\Big(\underbrace{\eta+\frac{8}{27}}_{\eta'}\Big)^2-\frac{64}{81}-$$

$$-3\Big(\underbrace{\zeta-\frac{1}{3}}_{\zeta'}\Big)^2+\frac{1}{3}-1=0$$

$$3(\xi')^2+9(\eta')^2-3(\zeta')^2=\frac{193}{81}$$

enmantlad hyperboloid

olika tecken ++− och + i HL

Hyperboloiden har centrum i punkten $\left(-\frac{5}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right)$ i de nya koordinaterna. För att få de gamla koordinaterna måste vi transformera tillbaka.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{9} \\ -8/27 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -111 \\ -120 \\ 57 \end{pmatrix}$$