

Matriser

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & ? \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
är en 2×3 -matris

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
är en 3×3 -matris

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ är en 3×1 matris
kallas kolonvektor

$(1 \ 2 \ 3)$ är en 1×3 -matris
kallas radvektor

transponat

Def: Byter vi plats på rader
och kolonner får vi matrixens
transponat, A^T .

Föreläsning 4, sid 3

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \xrightarrow{\text{transponet}} 3 \times 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$3 \times 3 \xrightarrow{T} 3 \times 3$

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = A \quad \text{symmetrisk}$$

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T = -A \quad \text{antisymmetrisk}$$

addition av matriser

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -1+1 \\ -1+(-1) & 2+0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

fungerar bara för matriser
med samma format!

Föreläsning 4, sid 6

Eftersom vanlig addition
är kommutativ och associativ
har vi att $A+B = B+A$,
 $(A+B)+C = A+(B+C)$. För
transponatet gäller $(A+B)^T = A^T + B^T$

$$\text{Ex: } \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Föreläsning 4, sid 7

$$\text{Ex. } \textcircled{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} + A = A + \textcircled{1} = A$$

(OBS! finns noll matriser)
av varje format

Vi har också

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -7 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så för varje matris A finns
en matris $(-A)$ så att $A + (-A) = \mathbf{0}$

Mängden av matriser av ett givet
format utgör en abelsk grupp.
 $A+B=B+A$

multiplikation med skalär

Def: $k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$

Ex. $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -7 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ -1 \cdot A &= (-A) \end{aligned}$$

Föreläsning 4, sid 10

$$k(A+B) = kA + kB$$

$$(k+l)A = kA + lA$$

$$0 \cdot A = \mathbf{0}$$

För transponerat gäller $(kA)^T = kA^T$

$$\text{Ex: } 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 21 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 21 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \text{Multiplikation} \\ E \times &: \begin{pmatrix} \underline{2} & \underline{0} & \underline{-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{7} & 3 \\ \underline{6} & 0 \\ \underline{-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{2} \cdot \underline{7} + \underline{0} \cdot \underline{6} + (\underline{-1}) \cdot (\underline{-1}) & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + (\underline{-1}) \cdot 1 \\ 1 \cdot \underline{7} + 1 \cdot \underline{6} + 1 \cdot (\underline{-1}) & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot \underline{7} + 2 \cdot \underline{6} + 1 \cdot (\underline{-1}) & 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 12 & 4 \\ 39 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Föreläsning 4, sid 12

~~$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$~~

Def. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} = C$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$(m \times \underline{p}) (\underline{p} \times n) = m \times n$$

Måste vara
lika annars fungerar

$$\begin{aligned} \text{Ex: } & \overset{(2 \times 3)}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}} \overset{\text{det } e_j}{\overset{(3 \times 2)}{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}} = \overset{(2 \times 2)}{\begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 3 \times 2 \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 2 \times 3 \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 4(-2) + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2(-2) + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1(-2) + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi ser att även om både $A \cdot B$ och $B \cdot A$ i det här fallet är definierade så är $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Matrismultiplikation är i allmänhet inte kommutativ.

Föreläsning 4, sid 15

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 7 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(minus felrättande faktorer)

Föreläsning 4, sid 16

$$\begin{aligned} E_x : (1 \ 0) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 7 \end{pmatrix} \\ &= (3 \ -1 \ 2) \\ (0 \ 1) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} \\ &= (5 \ 2 \ 7) \end{aligned}$$

Låt $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$. Om A är en $m \times n$ -matris får vi: $AE_n = A$.

Motsvarande gäller $E_n A = A$.
Matriserna E_n kallas
enhetsmatriser.

Från definitionen av matris-
multiplikation följer direkt att

$$\bullet \quad k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$$

*distributiva
lagarna*

$$\bullet \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$\bullet \quad A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0}$$