

Övn 5.5b) M kvadratisk

$$X = M + M^T$$

$$Y = M - M^T$$

Visa att X är symmetrisk
och Y antisymmetrisk.

$$X^T = (M + M^T)^T = M^T + (M^T)^T = M^T + M = X$$

$$Y^T = (M - M^T)^T = M^T - M = -Y$$

$$5.7: \text{Låt } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Visa att

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 = (A-B)^2.$$

Lösning: det räcker att visa att
 $AB = -BA$.

$$\text{Lösning: } (A+B)^2 = A^2 + \boxed{AB+BA} + B^2$$

$$\left(\begin{aligned} (A+B)(A+B) &= (A+B)A + (A+B)B \\ &= A^2 + BA + AB + B^2 \end{aligned} \right)$$

Vill ha $AB+BA=0$ dvs $AB = -BA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

forts matrismultiplikation

$$\text{Ex: } \left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 14 \\ 49 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 14 \\ 49 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$\sum_l \left(\sum_k \underset{\substack{(i,l): \text{elementet i } AB}}{a_{ik} b_{kl}} \right) c_{lj} = \sum_k a_{ik} \left(\sum_l \underset{\substack{(k,l): \text{elementet i } BC}}{b_{kl} c_{lj}} \right)$$

$$\text{Ex: } \left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ -3 & 24 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 8 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 8 & 24 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$\sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k b_{ik}^T a_{kj}^T$$

$(i,j): \text{e element}$ $(i,j): \text{e element}$
 $i (AB)^T$ $i B^T A^T$

Mängden av kvadratiske matriser
av en given storlek bildar en
ring.

matriser och linjära ekvationssystem

$$\text{Ex 1: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Ekvationssystemet kan skrivas om
som

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$E_x: \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}, \begin{cases} 2x'_1 + x'_2 - x'_3 = 1 \\ x'_1 - 3x'_2 + 2x'_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x'_1 \\ x_2 & x'_2 \\ x_3 & x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

radoperationer

Op 1: att ersätta en rad med den raden + en multipl av en annan rad

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{+k} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{21} & a_{32} + ka_{22} & a_{33} + ka_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

att ersätta rad i med $\text{rad } i + k \cdot \text{rad } j$
 ges av multiplikation till vänster
 med

$$E + k \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = R$$

pos (i, j)

Op 2: att ersätta en rad med en
 multipel av den raden

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & k & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ex: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

O_p : att byta plats på rader

Ex: vi vill byta plats på
rad 1 och 3 : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

P

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

P fås genom att utföra motsvarande operation på enhetsmatrisen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Alla ~~rad~~operationerna är omvändbara.
Omvändningarnas matriser är

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

$$k \neq 0, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P$$

V: här att

$$Q_1 \quad R^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cancel{k} + \cancel{k} & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$Q_2 \quad Q^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k \cdot \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$Q_3 \quad P^{-1}P = \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \underline{0} \cdot \underline{0} + \underline{0} \cdot \underline{0} + \underline{1} \cdot \underline{1} & \underline{0} \cdot \underline{0} + \underline{0} \cdot \underline{1} + \underline{1} \cdot \underline{0} & \underline{0} \cdot \underline{1} + \underline{0} \cdot \underline{0} + \underline{1} \cdot \underline{0} \\ \underline{0} \cdot \underline{0} + \underline{1} \cdot \underline{0} + \underline{0} \cdot \underline{1} & \underline{0} \cdot \underline{0} + \underline{1} \cdot \underline{1} + \underline{0} \cdot \underline{0} & \underline{0} \cdot \underline{1} + \underline{1} \cdot \underline{0} + \underline{0} \cdot \underline{0} \\ \underline{1} \cdot \underline{0} + \underline{0} \cdot \underline{0} + \underline{0} \cdot \underline{1} & \underline{1} \cdot \underline{0} + \underline{0} \cdot \underline{1} + \underline{0} \cdot \underline{0} & \underline{1} \cdot \underline{1} + \underline{0} \cdot \underline{0} + \underline{0} \cdot \underline{0} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ex: systemet } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

kan lösas med elementära (R,Q,P)
matriser:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Föreläsning 5, sid 15

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$