

Inverser

Def: Om $A \cdot B = E$ så är
 B ^{en} högerinvers till A
och A är en vänsterinvers
till B .

Ex: R^{-1} , Q^{-1} och P är vänster-
och högerinverser till R , Q och P .

Ex: Bestäm alla högerinverser
till $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Vi vill alltså hitta samtliga
matriser B sådana att $AB = E$.
En sådan matris måste vara
en 3×2 matris. Att hitta höger-
inverser är samma sak som att
lösa ekvationen $AX = E_2$, där
 X är en 3×2 matris av obekanta.

Så vi ska lösa det simultana systemet $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 13 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x_1 = 1 - 13t \\ x_2 = 5t \\ x_3 = t \end{cases}, \quad \begin{cases} x'_1 = 2 - 13s \\ x'_2 = -1 + 5s \\ x'_3 = s \end{cases}$$

som svarar mot $\begin{pmatrix} 1-13t & 2-13s \\ 5t & -1+5s \\ t & s \end{pmatrix}$

i det här fallet

OBS! det finns oändligt många högerinverser.

$$\begin{aligned}
 \text{Test: } & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-13t & 2-13s \\ 5t & -1+5s \\ t & s \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} 1-13t+10t+3t & 2-13s-2+10s+3s \\ 0-\cancel{5t}+\cancel{5t} & 0+1-\cancel{5s}+\cancel{5s} \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ex: Bestäm alla vänsterinverser
till $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Lösning: Det är ekvivalent med att lösa
 $XA = I_3$

I stället för att utveckla en analog teori för sådana system gör vi om ekvationen med hjälp av transponatet:

$$XA = E_3 \Leftrightarrow (XA)^T = E_3^T = E_3$$

$$\Leftrightarrow A^T X^T = E_3$$

Uppgiften är således ekvivalent med att finnas alla högerinverser till

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vi har nu det simultana systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{matrix}$$

som saknar lösningar, dvs
 A saknar vänsterinvers.

Sats: Om en matris, A , som har både höger- och vänsterinvers så är de lika.

Bevis: Låt A vara en $m \times n$ -matris.

Antag $AH = E_m$, $VA = E_n$.

Vi ser att H är en $n \times m$ -matris och V en $n \times m$ -matris. Vi har

$$\begin{aligned} H &= E_n H = (VA)H = V(AH) \\ &= VE_m = V \end{aligned}$$

Def: En matris A som har både höger- och vänsterinvers kallas inverterbar och inversen betecknas A^{-1} .

Sats: Alla inverterbara matriser är kvadratiska och alla kvadratiska matriser som har en ^{vänster eller höger} ensidig invers är inverterbara.

Ex: Bestäm inversen till $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Lös: Det räcker att bestämma
högerinversen.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{\frac{1}{2}} \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{3} \\ \boxed{\frac{1}{2}} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \boxed{1} \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{\frac{1}{2}} \\ \boxed{\frac{1}{2}} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \quad \text{SVAR: } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

"bevis": Invertibara matriser
måste vara kvadratiska för
i annat fall skulle vi få ett
stående simultant system

$$AX = E \text{ eller } A^T X^T = E$$

Men om A^{-1} finns skulle man
kunna ~~lösningen~~ lösa $AX = B$ genom att
ta $X = A^{-1}B$. Det betyder att
systemen skulle ha en lösning för
godtyckliga högerled men vi vet
att stående system i allmänhet saknar
lösningar.

Antag nu att vi har en kvadratisk matris A som har en högerinvers. Vi ska visa att den då även har en vänsterinvers. Högerinversen fås som lösningen till ekvationssystemet $AX = E$. Eftersom A är kvadratisk och systemet har en lösning, är motsvarande trappstegsmatrix enhetsmatrisen.

Men trappstegsmatrisen fås också genom att multiplicera A till vänster med en produkt U av elementära matriser. Vi får så att $UA = E$. Så A har vänster invers U .

Om A är inverterbar så
kan vi lösa ekvationen

$$A \underset{\substack{\text{kolonn} \\ \text{vektorer}}}{x} = b$$

genom att multiplicera till vänster
med A^{-1} :

$$\underline{x} = I x = A^{-1} A x = \underline{A^{-1} b}$$

Ex: Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases}$

$$\text{Lös: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Egenskaper hos inversen (två sidor)

Från definitionen följer att om A är inverterbar så är även A^{-1} det och $(A^{-1})^{-1} = A$.

Vi kan också lätt verifiera följande: Vi antar A inverterbar

$$\bullet (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \quad k \neq 0$$

$$(kA) \left(\frac{1}{k} A^{-1} \right) = \left(k \cdot \frac{1}{k} \right) A A^{-1} = E$$

$$\bullet (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = E^T = E$$

$$\bullet (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad A, B \text{ inverterbara}$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = \\ = AEA^{-1} = AA^{-1} = IE$$

Om AB inverterbar och A eller B kvadratisk, så är A och B inverterbara. Eftersom AB är inverterbar måste den vara kvadratisk vilket ger att A och B bägge måste vara kvadratiske. Om någon av dem är det.

A $m \times k$ B $k \times n$ ger AB $m \times n$

$$\text{Om } C = (AB)^{-1} \text{ har vi} \\ A^{-1} = BC, \quad B^{-1} = CA.$$

$$A(BC) = (AB)C = E$$

$$(CA)B = C(AB) = E$$