

Determinanter forts

Vi vill nu definiera begreppet
determinant i allmänhet.

Eftersom vi tänker oss att man
med hjälp av determinanter
ska kunna avgöra om en
matrix svarar mot en trappstegs-
form utan nollrader eller ej,
så måste definitionen vara sådan
att Op1-3 bevisar egenskapen
att $\det A \neq 0$.

Föreläsning 8, sid 2

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3$$

$$\text{Op 1: } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \boxed{-2} \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \quad \underline{\text{samma}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = -3 \quad \underline{\text{samma}}$$

$$\text{Op 2: } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \boxed{3} \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 6 = -9 = \boxed{3} \cdot (-3)$$

$$\text{Op 3: } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \boxed{5} \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 = -(-3) \quad \text{byter tecken}$$

Vår definition bör således uppfylla att determinanten är oförändrad under $Op1$, att den byter tecken om man byter plats på två rader och om man multiplicerar en rad med faktorn k så är det detsamma som att multiplicera hela determinanten med k . Om vi bestämmer att $\det E = 1$ och $\det A = 0$ om A har en nollrad,

så räcker det för att vi ska kunna räkna med determinanter.

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \boxed{-3} \\ \swarrow \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \boxed{\frac{1}{5}} \\ \swarrow \\ \end{matrix} =$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\det A}$

$$= (-5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \boxed{-2} \quad \boxed{-4} \quad \boxed{3} \\ \swarrow \\ \end{matrix} = (-5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \boxed{5} \\ \swarrow \\ \end{matrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-\frac{1}{5} \det A}$

Föreläsning 8, sid 5

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{5} \cdot (-5) \left| \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \swarrow & & \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 1 & \swarrow & & \\ 0 & 0 & 1 & -10 & \boxed{\frac{2}{5}} & \boxed{-\frac{1}{5}} & \boxed{\frac{2}{5}} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -3 & \swarrow & & \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \\ 0 & 0 & 1 & -10 & \\ 0 & 0 & 0 & -9 & \boxed{\frac{1}{9}} \end{array} \right| \\
 &= -(-9) \left| \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & \swarrow & & \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \swarrow & & \\ 0 & 0 & 1 & -10 & \swarrow & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{10} & \boxed{-3} & \boxed{14} \end{array} \right| = 9 \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right| = 9
 \end{aligned}$$

Altuz: $\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right| = 9.$

Föreläsning 8, sid 6

$$\begin{aligned} \text{Ex: } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \end{aligned}$$

Def: Låt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Då definierar vi

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Är den här definitionen kompatibel
med våra tidigare definitioner?

2x2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ $S_2 = \{id, (12)\}$

$\begin{matrix} & id & (12) \\ \operatorname{sgn} & +1 & -1 \end{matrix}$

Föreläsning 8, sid 8

$$\begin{aligned}
 3 \times 3: & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
 &\quad \underbrace{\quad}_{+} \quad \underbrace{\quad}_{+} \quad \underbrace{\quad}_{+} \\
 &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
 &\quad \underbrace{\quad}_{-} \quad \underbrace{\quad}_{-} \quad \underbrace{\quad}_{-}
 \end{aligned}$$

$$S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

O_p3 Att byta plats på två rader
svarar mot att multiplicera
med en transposition. $(\sigma \circ \sigma^{-1})$
Det betyder att tecknen byts
för $\text{sgn}(\tau\sigma) = \text{sgn}\tau \text{sgn}\sigma = -\text{sgn}\sigma$.

O_p7 : Att multiplicerar en rad med
en faktor k ger (sås att i multiplicerar
rad ett med k)

$$\begin{aligned} & \sum \text{sgn}(\sigma) (k a_{1\sigma(1)}) a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= k \sum \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = k \det A. \end{aligned}$$

Op: Att lägga till en multiplikation
 en rad till en annan rad
 ger

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \dots (a_{i\sigma(i)} + k a_{j\sigma(j)}) \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} +$$

$$+ k \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos } i}}{a_{j\sigma(j)}} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos } j}}{a_{i\sigma(i)}} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$= 0$ för den byter tecken när
 rad i och rad j byter plats.

$$= \det A.$$

En intressant observation är att

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Följer från att man kan dela upp
summan som vi gjorde när vi betraktade
operation 1.

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} 3+5 & 2+3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 11$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 10 - 3 = 11$$

En annan intressant observation
är att $\det A = \det A^T$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \end{aligned}$$

$\text{id} \qquad (12)$
 $\text{id} \qquad (12)=(12)^{-1}$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - \\ &\quad - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{31} a_{12} a_{23} + a_{21} a_{32} a_{13} \\ &\quad - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{31} a_{22} a_{13} \end{aligned}$$

$\text{id} \qquad (132)=(123)^{-1} \qquad (123)=(132)^{-1}$
 $(23) \qquad (12) \qquad (13)$

$$\text{Ex: } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = -1$$

Eftersom en determinant $\neq 0$
om och endast om determinanten
för motsvarande trappstegs matris $\neq 0$,
så får vi

Sats: Följande påståenden är ekvivalenta

1) $\det A \neq 0$

2) A inverterbar

3) ekvationen $Ax=b$
har precis en lösning.

4) $Ax=0$ om och endast
om $x=0$.

Ex övn 18: Hur många lösningar har systemen.

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{vmatrix} 20 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 \neq 0$
 $\Rightarrow$ finns precis en lösning.

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_B \begin{vmatrix} 20 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix}$ $\det B = 0$
 $\det B = -\det B \Rightarrow$ saknas eller finns

c) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_C \begin{vmatrix} 20 \\ 4 \\ 4 \end{vmatrix}$ $\det C = 0$
 $\parallel \det B$ oändligt många lösningar

utveckling av determinanter

Ex:
$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 4 & 6 \\ -6 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (\text{utveckling längs} \\ \text{andra kolonnen})$$

$$= -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 6 \\ -6 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 6 \\ -6 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 \cdot (-6) + (-1) \cdot 7 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 \cdot (-6) - 1 \cdot 6 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 7 \\ - (-1) \cdot 4 \cdot (-6) + 2(-1) \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 3 - (-1) \cdot 6 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot (-6) \\ = -162$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ex: } & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -29 \\
 & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 & = -28 - 1 = -29
 \end{aligned}$$