4. FV2 Vektorvärda funktioner

Arbetsblad 4a: Rekommenderade uppgifter
Uppgifter från Övningar till Analys i flera variabler och Uppgifter F. LU = Lösta uppgifter

3.9bc 3.10bc 3.12, 3.18	**Linjära vektorvärda funktioner och Jacobimatriser.** Jacobimatrisen till en funktion bildas av de partiella derivatorna till funktionens komponenter. Om komponenterna beror av x och y bildas första raden i Jacobimatrisen av derivatorna u'_x och u'_y (om u är funktionens första komponent). Och motsvarande för andra raden och andra komponenten. Om man sätter in koordinaterna för en punkt P i Jacobimatrisen erhålles en konstant matris A_P som alltså definierar en linjär transformation. Denna linjära transformation kan sägas utgöra en linjär approximation i P av den givna funktionen. Denna linjära transformation förhåller sig till funktionen i P som en tangentlinje till en kurva eller som ett tangentplan till en rymdyta.
2.55, 2.56a, 2.59 **F5:1-2**	**Kedjeregler och koordinattransformationer.** Här studeras hur byte av koordinater påverkar derivator. Man finner att vid ett visst koordinatbyte är det ofta lätt att uttrycka derivatorna med avseende på de nya variablerna i termer av derivatorna med avseende på de gamla. I så fall är koordinattransformationen given **åt rätt håll** (som i 255 - 259). Ofta är dock problemen formulerade med transformationer åt fel håll (som i F-problemen). Man måste då kunna uttrycka exempelvis x'_u, x'_v, y'_u och y'_v i u'_x, u'_y, v'_x och v'_y. Ett sätt att göra detta är att invertera motsvarande Jacobimatris. Det är alltså nyttigt att här komma ihåg hur man inverterar en 2x2-matris.
2.60b 2.61b 2.62ab **F5:6**	**Taylorutvecklingar.** I uppg.2.60-62 gäller det att utföra Taylorutvecklingar av skalärvärda flervariabelfunktioner. Det är praktiskt att använda variablerna h och k för x-a resp. y-b. I 2.62a skall Taylorutvecklingarnas resttermanges. Denna kan uttryckas i termer av r ($r^2 = h^2 + k^2$). I F5:6 skall en vektorvärd funktion Taylorutvecklas. Det innebär att varje komponent utvecklas separat enligt den vanliga formeln för skalärvärda funktioner. Observera att Taylorutvecklingarna $P_1(x,y)$ av 1:a graden ger ekvationerna för funktionsgrafens tangentplan (z = $P_1(x,y)$). Om man använder h och k i F5:6 måste man föra in x=1+h och y=1+k för att få tangentplanet i det givna svaret.

3.22a-d 3.37 **F5:3ab** 3.25, 3.27 **F5:4,** **F5:5**	**Inversa funktioner och implicit definierade funktioner.** Precis som man kan tala om inverser till linjära funktioner (där alltså dessa inverser definieras av en inversmatris) kan man tala om inverstransformer till ickelinjära funktioner från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^n$. Man kan hitta villkor som säkerställer att en funktion är inverterbar i en omgivning av en punkt. Funktionens kvadratiska Jacobimatris i en punkt definierar som vi har sett en linjär approximation till funktionen i punkten. Om denna matris är inverterbar visar det sig att funktionen själv är inverterbar i en omgivning av punkten. Och inverterbarhet hos en matris testar man ju med determinanten (det A ? 0 <=> A är inverterbar). Man löser alltså problem i flervariabelanalysen genom att plocka fram den linjära delen av Taylorutvecklingen och tillämpa linjäralgebraiska resultat på denna. Motsvarande ideer kan också tillämpas på problemen med implicit definierade funktioner. Man kan återföra problemet till motsvarande linjära problem där man testar, med hjälp av underdeterminanter, om de oändligt många lösningarna till ett liggande linjärt system (fler variabler än ekvationer) kan uttryckas i termer av vissa variabler.