

5. LA3**Linjär algebra 3.**[Utskrift\(PDF\)](#)[Förkunskaper](#)**Föreläsningar**

Avsnitt i **LGA** (Linjär geometri och algebra.)

Innehåll (LGA):

Kap.7 (ej 7.3.4).*

Kap.8.

Fr 28/01: 8-10

7.2 Byte av koordinatsystem.

- 7.2.1 Transformationsmatriser. ON-transformationer.
- 7.2.2 Vektorers koordinater i olika system.

Vid linjära koordinatbyten kan man införa ett nytt koordinatsystem med en linjär transformation C som ger de nya basvektorerna $\mathbf{f}_j$ i termer av de gamla $\mathbf{e}_j$ genom $\mathbf{f}_j = C\mathbf{e}_j$, $j=1,2,3$. Matrisen C kallas **transformationsmatris**. Oftast låter man de gamla basvektorerna vara $\mathbf{e}_1^T = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2^T = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3^T = (0,0,1)$ och i det fallet består C 's kolumner av de nya basvektorerna $\mathbf{f}_j$. Transformationer vars nya basvektorer är inbördes ortogonala och har längden 1 kallas **ON-transformationer**. Motsvarande ON-matriser har determinanten 1 eller -1. Det finns en relation mellan en vektors koordinater i gamla och nya systemet ($\mathbf{v}_e$ resp. $\mathbf{v}_f$) nämligen $\mathbf{v}_e = C\mathbf{v}_f$.

Fr 28/01: 8-10

7.2 Byte av koordinatsystem (forts.)

- 7.2.3 Matrisers komponenter i olika system.

På samma sätt som vektorers koordinater transformeras vid koordinatbyten så gör matrisers komponenter det. Om $\mathbf{u}_e$ och $\mathbf{v}_e$ uppfyller $\mathbf{v}_e = A_e \mathbf{u}_e$ i det gamla koordinatsystemet söker man den matris A_f som utför samma transformation i det nya systemet: $\mathbf{v}_f = A_f \mathbf{u}_f$. Det visar sig att relationen mellan A_e och A_f är (*) $A_f = C^{-1} A_e C$. I det vanliga specialfallet att C är en **(5.1) ON-matris** har man god användning av relationen $C^{-1} = C^T$, som alltså gäller då C är en ON-matris och som underlättar inverteringen av C i (*).

On 02/02: 13-17

7.3 Diagonaliseringsproblemet.

- 7.3.1-2 Egenvärden och egenvektorer.

Om vektorn $\mathbf{v}$ och talet λ uppfyller $A \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, säger man att λ är ett **(5.2) egenvärde** till matrisen A och att $\mathbf{v}$ är en **egenvektor** till A svarande mot egenvärdet λ . Dessa begrepp har ett stort antal tillämpningar inom och utom matematiken. Bl.a löser man med deras hjälp **diagonaliseringsproblemet** för matriser i de fall detta är möjligt.

	Ett viktigt problem är att bestämma egenvärden och motsvarande egenvektorer till en given kvadratisk matris. Här använder man metoder från modul LA2 (determinanter och linjära homogena ekvationssystem).
On 02/02: 13-17 7.3 Diagonaliseringsproblemet (forts.) 7.3.3 Diagonalisering med ON-transformationer.	Det visar sig att en matris alltid kan (5.3)diagonaliseras om den är symmetrisk, dvs uppfyller att $A = A^T$. (Diagonalisering av $A=A_e$ innebär att den transformerade nya matrisen $A_f=C^{-1}A_eC$ är en diagonalmatris). Dessutom kan diagonaliseringen alltid ske med en ON-matris C. Den erhållna diagonaliserade matrisen har då A:s egenvärden som diagonalelement.
On 02/02: 13-17 Kvadratiske former 8.1.1-2 andragradskurvor	(5.4) Kvadratiske former kan beskrivas som andragradspolynom i flera variabler med enbart andragradstermer. Sådana polynom kan skrivas på formen $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ där $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots)$ och Q är en symmetrisk matris. I fallet två variabler blir Q en 2x2 matris och ekvationer av typ $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = ax+b$ beskriver andragradskurvor. Genom att utföra ett koordinatbyte med en ON-matris kan man diagonalisera den kvadratiske formen. Motsvarande diagonalisering av andragradskurvas ekvationer ger möjlighet att ge en algebraisk beskrivning av den klassiska klassificeringen, ellipser, hyperbler och parabler.
Må 07/02: 10-12 Andragradsytor 8.2.1 Huvudaxelformerna. 8.2.2 Reduktion till huvudaxelform.	Diagonaliseringar av kvadratiske former i tre variabler svara på samma sätt mot en klassificering av (5.5) andragradsytor. Med fler variabler blir antalet olika fall större än i tvåvariabelfallet. Diagonaliseringsproceduren kallas också reduktion till huvudaxelform och svarar mot att man låter det nya koordinatsystemets axlar sammanfalla med huvudaxlarna till den aktuella andragradsytan.
Må 07/02: 10-12 Andragradsytor(forts.) 8.2.3 Exempel: - Matrisnorm - Ytor av typ $z=f(x,y)$.	Begreppet (5.6a) Matrisnorm (även (5.6b)) används i samband med problemet att maximera $\mathbf{A}\mathbf{v}$ då $\mathbf{v} =1$. Matrisnormen $\ \mathbf{A}\$ definieras i själva verket som detta maximum. Lösningen består bl.a. i att man bestämmer egenvärdena till den symmetriska matrisen $A^T A$. Studium av funktioner $z=f(x,y)$ av kvadratiskform-typ behövs i samband med max- och minundersökningar i modul FV3. Sådana kvadratiske former förekommer i den kvadratiske delen av Taylorutvecklingar av tvåvariabelfunktioner. På samma sätt som tecknet för y'' normalt avgör ett extremvärdes karaktär i envariabelfallet bestämmer den kvadratiske formen och dess matris Q ett extremvärdes karaktär i tvåvariabelfallet. Närmare bestämt är det Q:s egenvärden som avgör detta.

Uppdaterad: 2004-11-01

Sidansvarig: **Kursledare**