KTH Matematik

Tentamen i 5B1118 Diskret Matematik 5p.
Augusti, 2004

- *Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare med sifferdisplay.*
- *Väl motiverade svar krävs!*
- *För godkänt (=Betyg 3) fordras minst 18 poäng, för betyg 4 minst 23 poäng och för betyg 5 minst 30 poäng.*

DEL A, 3p per uppgift.

(1) (3p) Visa med hjälp av induktion att:

$$n^2 - 2n - 1 > 0 \text{ för } n \geq 3$$

Satsen är sant för $n = 3$: $9 - 6 - 1 > 0$.

Antag att satsen gäller för varje $3 \leq n \leq k$ och visa att satsen är sant för $n = k + 1$.

$$(k+1)^2 - 2(k+1) - 1 = [k^2 - 2k - 1] + [2k - 1] > 0 + 5 > 0$$

(2) (3p) Bestäm talet x om

$$\sum_{i=0}^{30} \binom{30}{i} 7^i = x^{90}.$$

Enligt binomialsatsen:

$$(7+1)^{30} = \sum_{i=0}^{30} \binom{30}{i} 7^i$$

Man ska lösa $8^{30} = x^{90} = (x^3)^{30}$. Det följer att $x^3 = 8$ och så $x = 2$.

(3) (3p) Bestäm om grafer G_1, G_2 med följande incidensmatriser är isomorfa.

$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{G_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G_1 har en nod med grad 3 och alla noder i G_2 har grad 2. Grafer kan inte vara isomorfa.

(4) (3p) Betrakta de följande permutationer $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_7$:

$$\sigma = [3547216], \quad \tau = [1243657]$$

(a) $\sigma = (13476)(25)$, $\tau = (34)(56)$.
(b) $\sigma^{-1} = (16743)(25)$.
(c) $\tau \circ \sigma^{-1} = (152673)$

(5) (3p) Skriv checkmatrisen av en kod av längd 15 som rättar precis ett fel.

$15 = 2^4 - 1$, så kan man skriva en Hamming kod med $r = 4$. Matrisen M har 4 rader och 15 kolumner, som består av alla ickenoll sekvenser av 4 element i $\mathbb{Z}_2$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

DEL B, 5p per uppgift.

(6) (5p) Låt $S = \{a \in \mathbb{R}$ så att $a \neq -1\}$. Betrakta den följande operationen $*$:

$$a * b = a + b + ab$$

(a) Visa att $*$ är en binära operation på S. Man ska visa att $a * b \in S$ för alla $a, b \in S$. $a * b \in \mathbb{R}$ och $a * b \neq -1$. Om $a * b = a + b + ab = -1$ då gäller $a * b = a + b + ab + 1 = (b+1)(a+1) = 0$. Det följer att $a = -1$ eller $b = -1$ som är omöjligt, $a, b \in S$.

(b) Visa att $(S, *)$ är en grupp.

- (G1)

$$(a * b) * c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c = a + b + c + ab + ac + bc + abc$$

$$a * (b + c) = a + (c + b + cb) + a(c + b + cb) = a + b + c + ab + ac + bc + abc$$

- (G2) identitetet är 0:

$$0 * a = a * 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a$$

- (G3) inversen av elemntet a är ett element x så att

$$a * x = x * a = a + x + ax = 0$$

Det följer att $x = \frac{-a}{a+1} \neq -1$, dvs $x \in S$.

(c) Bestäm lösningen av $2 * x * 3 = 7$ i S.

$2 * x * 3 = (2 + x + 2x) * 3 = 2 + x + 2x + 3 + 6 + 3x + 6x = 7$

Man ska lösa ekvationen $12x + 4 = 0$. Lösningar är $x = -\frac{1}{3}$.

(7) (5p) Bestäm antalet 6 siffriga jämna heltal om ingen siffra förekommer mer än en gång.

Jämna heltal slutar med en jämn siffra, $0, 2, 4, 6, 8$. Vi ska beräkna antalet sätt att välja 6 siffror, utan upprepning när

- första siffran kan väljas bland $1, ..., 9$
- följande 4 kan väljas bland 0 och 9
- sista kan väljas bland $0, 2, 4, 6, 8$.

Det är lättare att dela upp alternativen i två grupper:

(a) heltal som slutar med 0

(b) heltal där sista siffran är skild från 0.

Enligt multiplikations principen finns det $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ element i första gruppen.

För att beräkna antalet element i andra gruppen börjar vi på sista siffran (där vi har 4 olika alternativ) och sedan fortsätter vi från första siffran. Så det finns $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 53760$ många alternativ.

Totalt har vi $53760 + 15120$

(8) (5p) Hur många permutationer av siffrorna $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ börjar med en trea eller slutar med an sjua?

Låt $A = \{\sigma \in S_{10}$ som börjar med en trea $\}$ och $B = \{\sigma \in S_{10}$ som slutar med an sjua $\}$.
Vi ska räkna kardilalitetet av unionen:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$|A| = |B| = 9!$ och $|A \cap B| = 8!$
Svaret är $9! + 9! - 8! = 685440$.

(9) (5p) Betrakta de följande funktioner $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = 103x + 173, \quad g(x) = ax + b$$

där $a, b \in \mathbb{Z}$. Bestäm alla värden på a och b för vilka:

$$f \circ g = g \circ f$$

$$f \circ g = 103(ax + b) + 173 = g \circ f = a(103x + 173) + b$$

Det följer att $103ax + 103b + 173 = 103ax + 173a + b$, så:

$$173a - 102b = 173$$

En lösning är $(a, b) = (1, 0)$. Den $mcm(102, 173) = 173 \cdot 102$. Det följer att den allmänna lösning blir: $(a, b) = (1 + 102k, 173k)$ där $k \in \mathbb{Z}$.