

Facit och/eller lösningsförslag till uppgifter i Eriksson-Gavel

2.7 Antag exempelvis att $S_1 = \{\text{svenska, engelska, tyska, ryska}\}$ och $S_2 = \{\text{svenska, engelska, franska, grekiska, latin}\}$.

(a) $S_1 \cup S_2 = \{\text{svenska, engelska, tyska, ryska, franska, grekiska, latin}\}$.

(b) $S_1 \cap S_2 = \{\text{svenska, engelska}\}$.

4.18 Vi använder induktion. Bassteget består lämpligen av två fall, $n = 0$ och $n = 1$ (för att vi ska kunna använda antaganden om både a_n och a_{n+1} i induktionssteget). Då $n = 0$ har vi $VL = a_0 = 1 = (1 + 2 \cdot 0) \cdot 3^0 = HL$, och då $n = 1$ har vi $VL = a_1 = 9 = (1 + 2 \cdot 1) \cdot 3^1 = HL$, så påståendet är sant för dessa två fall.

Fixera $n \in \mathbb{N}$, och antag nu att $a_n = (1 + 2n)3^n$ och att $a_{n+1} = (1 + 2(n+1))3^{n+1}$. Vi ska visa att i så fall gäller $a_{n+2} = (1 + 2(n+2))3^{n+2}$. Vi får:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 6a_{n+1} - 9a_n = 6(1 + 2(n+1))3^{n+1} - 9(1 + 2n)3^n = \\ &= 2 \cdot 3(1 + 2(n+1))3^{n+1} - 3^2(1 + 2n)3^n = (2 + 4(n+1))3^{n+2} - (1 + 2n)3^{n+2} = \\ &= (2 + 4(n+1) - (1 + 2n))3^{n+2} = (5 + 2n)3^{n+2} = (1 + 2(n+2))3^{n+2}, \end{aligned}$$

som önskat. □

4.19 Induktion. I basfallet $n = 1$ fås $VL = \sum_{i=1}^1 \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2}$ och $HL = \frac{1}{2} = VL$.

Fixera $n \in \mathbb{Z}_+$ och antag att $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$. Vi ska visa att i så fall gäller $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n+1}{n+2}$. Man får:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

som önskat. □

4.20 Induktion. I basfallet $n = 1$ säger påståendet att 15 delar $4^2 - 1 = 15$, vilket är sant.

Fixera nu $n \in \mathbb{Z}_+$, och antag att 15 delar $4^{2n} - 1$, det vill säga att $4^{2n} - 1 = 15\alpha$ för något $\alpha \in \mathbb{Z}$. Vi ska visa att i så fall delar 15 också $4^{2(n+1)} - 1$. Notera att

$$4^{2(n+1)} - 1 = 4^{2n} \cdot 4^2 - 1 = (15\alpha + 1) \cdot 4^2 - 1 = 16 \cdot 15\alpha + 15 = 15(16\alpha + 1),$$

vilket uppenbarligen är delbart med 15. Beviset är klart. $\square$

4.31 Induktion. Basfallet är $n = 0$, och då säger påståendet att $a_0 = 2 > 3^0 = 1$, vilket är sant.

Fixera $n \in \mathbb{N}$, och antag att $a_n > 3^n$. Vi ska visa att $a_{n+1} > 3^{n+1}$. Observera att

$$a_{n+1} = 3a_n + 1 > 3 \cdot 3^n + 1 = 3^{n+1} + 1 > 3^{n+1},$$

som önskat. $\square$

4.32 Induktion. Vi ska själva leta upp lämpligt basfall. Man har $3! = 6 < 2^3 = 8$, men $4! = 24 > 2^4 = 16$, så påståendet är sant för $n = 4$.

Fixera nu $n \in \{4, 5, 6, \dots\}$. Antag att $n! > 2^n$. Vi ska visa att $(n+1)! > 2^{n+1}$. Vi får

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! > (n+1) \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

som önskat. Vi har visat att påståendet gäller för alla $n \in \{4, 5, 6, \dots\}$. $\square$

4.47 Induktion. I basfallet $n = 1$ har man $4^1 = 12 \cdot 0 + 4$, så resten är 4 och påståendet sant.

Antag nu att $4^n = 12 \cdot q + 4$ för något $q \in \mathbb{Z}$. Vi ska visa att i så fall är resten 4 vid division av 4^{n+1} med 12. Vi har

$$4^{n+1} = 4 \cdot 4^n = 4(12 \cdot q + 4) = 4 \cdot 12q + 16 = 12(4q + 1) + 4,$$

så resten är just 4. $\square$

5.55 Dela in brädets 64 rutor i 16 2×2 -kvadrater. Observera att två pjäser som står i samma 2×2 -kvadrat har hamnat i en förbjuden position. Postfacksprincipen säger att om 17 pjäser placeras ut, måste två hamna i samma 2×2 -kvadrat, och beviset är klart. $\square$

5.56 Säg att man får en poäng för vinst, noll för förlust. När man har mött alla motståndare, har man en poängsumma mellan 1 och $n-1$ ($n-1$ möjliga värden). Enligt postfacksprincipen måste alltså minst två av de n spelarna ha samma poängsumma. $\square$