5B1127 Matematik H1, VT 2004
Exempeltentamen 1

Inga hjälpmedel är tillåtna. Inklusive bonuspoäng kan man få 40 poäng. Betygsgränser: betyg 3: 16p, betyg 4: 21p, betyg 5: 27p. Oläsliga lösningar eller svar utan motivering ger noll poäng. Uppgifterna är inte ordnade på något speciellt sätt. Skrivtid: fem timmar.

1. (3p) Finn alla heltalslösningar till ekvationen

$$28x + 12y = 44.$$

2. (3p) Finn det kortaste avståndet mellan punkten $(0, -1, 3)$ och planet som innehåller punkterna $P = (0, 0, 1)$, $Q = (1, 1, 1)$ och $R = (1, 0, -1)$. (Vi förutsätter att koordinatsystemet är av ON-typ.)

3. (4p) En lösning till ekvationen $x^4 - 2x^3 - 11x^2 - 18x - 10 = 0$ ges av $x = -1 + i$. Finn samtliga lösningar.

4. (2p) Skriv det decimala talet 999 i talbasen 9.

5. (3p) Ange en injektiv funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ med värdemängd $\mathbb{N} \setminus (\{1, 3\} \cup \{2x \mid x \in \mathbb{N}\})$.

6. (3p) Bestäm alla reella tal a sådana att punkterna (x, y, z) som löser ekvationssystemet bildar en rät linje.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ ax - 4y + 2z = 0, \\ 9x + 6y - 3z = 0. \end{cases}$$

7. (4p) En klass med 20 elever ska ställa upp sig på två rader om tio elever i vardera för fotografering. Raderna är ordnade så att varje elev i den bakre raden har en elev i den främre omedelbart framför sig (och vice versa). Tyvärr hatar eleverna Adam och Berta varandra, så de kan varken stå bredvid varandra på samma rad eller på samma position i olika rader. På hur många sätt kan fotografen ordna eleverna? (Svaret får ges som en produkt av heltal.)

8. (3p) Bestäm determinanten för matrisen $(\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AC})^3$, där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

9. (3p) Avgör om det finns något plan som innehåller de fyra punkterna $(1, -2, 6)$, $(0, -2, -3)$, $(2, -1, -1)$ och $(-1, -3, 4)$. (Vi förutsätter att koordinatsystemet är av ON-typ.)

10. (4p) Betrakta talföljden $a_0, a_1, a_2, \ldots$ som definieras genom $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ och $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ för $n \geq 2$. Visa att

$$a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

för alla $n \in \mathbb{N}$.

Lösningsförslag

1. Skriv $\gcd(28,12) = 4$ som en linjärkombination av 28 och 12. Använd Euklides algoritm, eller observera helt enkelt att $4 = 28 - 2 \cdot 12$. Därför har vi $44 = 11 \cdot 4 = 11 \cdot 28 - 11 \cdot 2 \cdot 12$, varför en lösning ges av $x = 11$, $y = -22$. Ansatsen $x = 11 + k$, $y = -(22 + \ell)$ insatt i ekvationen ger nu $28k = 12\ell$, varför båda leden måste vara en multipel av $\mathrm{lcm}(12, 28) = 84$. Således: $28k = 12\ell = 84\alpha$, vilket ger $k = 3\alpha$, $\ell = 7\alpha$.

Svar: $x = 11 + 3\alpha$, $y = -22 - 7\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

("Snyggare", ekvivalent, svar: $x = 2 + 3\alpha$, $y = -1 - 7\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.)

2. Planets normalvektor ges av $\mathbf{n} = \overline{PQ} \times \overline{PR} = (1-0, 1-0, 1-1) \times (1-0, 0-0, -1-1) = (1, 1, 0) \times (1, 0, -2) = (-2, 2, -1)$.

Välj en punkt på planet, till exempel P. Vektorn mellan P och den givna punkten $B = (0, -1, 3)$ är $\overline{PB} = (0 - 0, -1 - 0, 3 - 1) = (0, -1, 2)$. Den kortaste vektorn mellan planet och B ges av den vinkelräta projektionen av $\overline{PB}$ på $\mathbf{n}$. Denna vektor är

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}(\overline{PB}) = \frac{\overline{PB} \bullet \mathbf{n}}{\| \mathbf{n} \|^2}\mathbf{n} = \frac{(0, -1, 2) \bullet (-2, 2, -1)}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2}^2}(-2, 2, -1) = -\frac{4}{9}(-2, 2, -1).$$

Det sökta avståndet är normen av denna vektor, som är $\frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{4}{3}$.

Svar: $\frac{4}{3}$ längdenheter.

3. Kalla polynomet i vänsterledet $p(x)$. Eftersom $p(x)$ bara har reella koefficienter, är $x = -1-i$ en annan lösning. Faktorsatsen säger att $(x-(-1+i))(x-(-1-i)) = x^2+2x+2$ delar $p(x)$. Vi utför divisionen, med liggande stolen eller genom inspektion, och får: $p(x) = (x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x + 2)$. De kvarvarande lösningarna är alltså rötterna till polynomet $x^2 - 4x - 5$. Dessa rötter är -1 och 5.

Svar: $-1 + i$, $-1 - i$, -1 och 5.

4. Dividera upprepade gånger med 9. Sekvensen av (principala) rester är det sökta uttrycket:

$$\begin{array}{rcrl} 999 & = & 9 \cdot 111 & + 0, \\ 111 & = & 9 \cdot 12 & + 3, \\ 12 & = & 9 \cdot 1 & + 3, \\ 1 & = & 9 \cdot 0 & + 1. \end{array}$$

Svar: 1330.

5. Funktionens värdemängd ska tydligen vara mängden av udda heltal som är större än eller lika med 5. Konstruera till exempel f genom att låta $f(x) = 5 + 2x$. Uppenbarligen är f:s värdemängd just den önskade. Funktionen är injektiv, ty för $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ har vi

$$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow 5 + 2x_1 = 5 + 2x_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

Svar: $f(x) = 5 + 2x$ (exempelvis).

6. Notera att den sista ekvationen är en multipel av den första och alltså överflödig. Vi har alltså kvar ett homogent, linjärt ekvationssystem med tre obekanta och två ekvationer. Lösningsmängden till ett sådant bildar antingen ett plan (om de båda ekvationerna är ekvivalenta) eller en linje (om ekvationerna är oberoende). Vi måste alltså välja a så att de båda ekvationerna inte är multipler av varandra. Det enda a som gör att de är multipler av varandra är $a = -6$.

Svar: $a \neq -6$.

7. Låt oss först placera ut Adam, därefter Berta, därefter resten av eleverna. Adam kan ställas på 20 platser. 16 av dessa (de som inte är på kanterna) förbjuder tre platser för Berta, som då kan placeras på någon av de kvarvarande $20 - 1 - 3 = 16$ platserna. Om Adam istället ställs på en kantplats, förbjuds bara två platser för Berta, som i detta fall kan placeras på $20 - 1 - 2 = 17$ sätt. Sammanlagt finns alltså $16 \cdot 16 + 4 \cdot 17 = 324$ sätt att placera ut Adam och Berta. När en sådan placering väl är vald, kan övriga elever placeras ut på de kvarvarande 18 platserna på $18!$ sätt.

Svar: $324 \cdot 18!$.

8. Med Sarrus regel eller via utveckling längs lämplig rad/kolumn med många nollor får vi $\det \mathbf{A} = 3$, $\det \mathbf{B} = 8$ och $\det \mathbf{C} = -8$. Via produktregeln för determinanter fås

$$\det((\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AC})^3) = (3 \cdot 8)^{-1} \cdot (3 \cdot (-8))^3 = \frac{1}{24} \cdot (-24)^3 = -24^2 = -576.$$

Svar: -576.

9. Inför följande namn på punkterna: $A = (1, -2, 6)$, $B = (0, -2, -3)$, $C = (2, -1, -1)$ och $D = (-1, -3, 4)$. Låt oss bestämma volymen av den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $\overline{AB} = (-1, 0, -9)$, $\overline{AC} = (1, 1, -7)$ och $\overline{AD} = (-2, -1, -2)$. Om volymen är noll, ligger punkterna i ett plan, annars inte. Volymen ges av beloppet av trippelprodukten:

$$|\overline{AB} \bullet \overline{AC} \times \overline{AD}| = |(-1, 0, -9) \bullet (1, 1, -7) \times (-2, -1, -2)| = |(-1, 0, -9) \bullet (-9, 16, 1)| = 0.$$

Svar: Ja, det finns ett sådant plan.

10. Vi använder induktion över n. Påståendet är sant för $n = 0$ och $n = 1$, ty $a_0 = 0 = (2^0 - (-1)^0)/3$ och $a_1 = 1 = (2^1 - (-1)^1)/3$.

Fixera nu $n \geq 2$, och antag att påståendet är sant för $n-1$ och $n-2$, d v s att $a_{n-1} = (2^{n-1} - (-1)^{n-1})/3$ och $a_{n-2} = (2^{n-2} - (-1)^{n-2})/3$. Vi får

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} = \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1}}{3} + 2 \cdot \frac{2^{n-2} - (-1)^{n-2}}{3} =$$
$$= \frac{2^{n-1} - (-1)^{n-1} + 2^{n-1} - 2 \cdot (-1)^n}{3} = \frac{2^n - (-1)^n}{3},$$

som önskat. Påståendet följer nu för alla $n \in \mathbb{N}$ per induktion. $\square$