

5B1127 Matematik H1, VT 2004

Exempeltentamen 2

Inga hjälpmedel är tillåtna. Inklusive bonuspoäng kan man få 41 poäng. Betygsgränser: betyg 3: 17p, betyg 4: 22p, betyg 5: 28p. Oläsliga lösningar eller svar utan motivering ger noll poäng. Uppgifterna är inte ordnade på något speciellt sätt. Skrivtid: fem timmar.

1. (3p) Finn alla lösningar till ekvationen $12x = 15$ i $\mathbb{Z}_{39}$.
2. (3p) Betrakta linjen som går genom punkten $(1, -2, 1)$ och är vinkelrät mot planet som har ekvationen $4x - 3z = 3$. I vilken punkt skär linjen detta plan? (Vi förutsätter att koordinatsystemet är av ON-typ.)
3. (4p) Finn alla tal i $\mathbb{C}$ som löser ekvationen $x^6 + 16x^3 + 64 = 0$.
4. (3p) Följande uttryck är oktalt (alltså skrivet i talbasen 8). Beräkna summan och uttryck den i talbasen 7.
$$721 + 71 = ?$$
5. (3p) Låt $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ och $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Hur många injektiva funktioner $f : A \rightarrow B$ finns det som uppfyller att $f(a) + f(b) = 10$? (Svaret får ges som en produkt av heltal.)
6. (3p) Finn alla lösningar till matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. (3p) Hur många olika följder kan man bilda av samtliga bokstäver i ordet TENTAMEN om de båda T:na aldrig får stå bredvid varandra? (Svaret får ges som en produkt av heltal.)

8. (3p) Avgör om matrisen $(\mathbf{AC})^4(\mathbf{BC})^3(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ är inverterbar, där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. (a) (2p) Låt ℓ_1 vara linjen som har ekvationen $(x, y, z) = (-3 - 2t, -2, 9 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt ℓ_2 vara linjen med ekvationen $(x, y, z) = (-2 + 3t, -2t, 1 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Visa att ℓ_1 och ℓ_2 skär varandra.

(b) (2p) Låt ℓ_3 vara den linje som är vinkelrät mot både ℓ_1 och ℓ_2 och som är sådan att alla tre linjerna har en gemensam punkt. Bestäm en ekvation för ℓ_3 .

(Vi förutsätter att koordinatsystemet är av ON-typ.)

10. (4p) Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller att

$$\sum_{k=0}^n k(k + \frac{1}{3}) = \frac{n(n+1)^2}{3}.$$

Lösningsförslag

1. Vi söker alla x -komponenter av lösningar till den diofantiska ekvationen $12x + 39y = 15$. Till att börja med skriver vi $\gcd(12, 39) = 3$ som en linjärkombination av 12 och 39, antingen med Euklides algoritm eller genom att observera att $3 = 39 - 3 \cdot 12$. Därför har vi $5 \cdot (-3) \cdot 12 + 5 \cdot 1 \cdot 39 = 15$, varför $x = -15$, $y = 5$ är en lösning till den diofantiska ekvationen. För att hitta de andra ansätter vi $x = -(15 + k)$, $y = 5 + \ell$. Sätter vi in detta i ekvationen får vi $12k = 39\ell$, varför $12k = 39\ell$ är en godtycklig multipel av $\text{lcm}(12, 39) = \frac{12 \cdot 39}{3}$. Därför fås $k = 13\alpha$ för något $\alpha \in \mathbb{Z}$ (ℓ är vi inte intresserade av). Notera att $0 \equiv 3k \pmod{39}$, så lösningarna är $x = -15 - 13\alpha$, $\alpha \in \{0, 1, 2\}$. Vill vi svara med tal mellan 0 och 38 får vi lösningsmängden $\{24, 11, 37\}$.

Svar: 11, 24 och 37.

2. Linjens riktningsvektor är tydligen densamma som planets normalvektor som är $\mathbf{n} = (4, 0, -3)$. Linjens ekvation är därför $(x, y, z) = (1 + 4t, -2, 1 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$. Vi söker det värde på parametern t som motsvarar skärningspunkten: $4(1 + 4t) - 3(1 - 3t) = 3$ ger $t = 2/25$. Skärningspunkten är alltså $(1 + 2 \cdot 4/25, -2, 1 - 2 \cdot 3/25) = \frac{1}{25}(33, -50, 19)$.

Svar: $\frac{1}{25}(33, -50, 19)$.

3. Substituera först $t = x^3$ för att få en andragradsekvation i t , nämligen $t^2 + 16t + 64 = 0$, vilken har en dubbelrot i $t = -8$. Vi ska lösa $x^3 = -8$. Skriv på polär form: $x = re^{iv}$ och $-8 = 8e^{i\pi}$, så att ekvationen blir

$$r^3 e^{3iv} = 8e^{i(\pi + 2\pi n)},$$

varför $r = 2$ och $v = \pi/3 + 2\pi n/3$, $n \in \{0, 1, 2\}$. Lösningarna är alltså $2e^{i\pi/3}$, $2e^{i\pi}$ och $2e^{5i\pi/3}$. På rektangulär form: $1 + \sqrt{3}i$, -2 och $1 - \sqrt{3}i$.

Svar: -2 , $1 + \sqrt{3}i$ och $1 - \sqrt{3}i$. (Samtliga är dubbelrötter.)

4. Även om det är fullt görbart att utföra hela beräkningen i det oktala systemet, känner åtminstone jag större trygghet i det decimala. Vi översätter därför dit: $721_8 = 1 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^2 = 465_{10}$ och $71_8 = 1 + 7 \cdot 8 = 57_{10}$. Summan är 522, vars representation i basen 7 vi söker med Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 522 &= 7 \cdot 74 + 4, \\ 74 &= 7 \cdot 10 + 4, \\ 10 &= 7 \cdot 1 + 3, \\ 1 &= 7 \cdot 0 + 1. \end{aligned}$$

Sekvensen av (principala) rester är det sökta uttrycket.

Svar: 1344.

5. En funktion bestäms genom att välja funktionsvärde för vart och ett av elementen i A . Den blir injektiv om alla dessa funktionsvärden är olika. Vi kan välja $f(a)$ på 8 sätt (vi får nämligen inte välja $f(a) = 5$ eftersom det skulle tvinga $f(b) = 5$, vilket är förbjudet då f ska vara injektiv, och vi kan inte välja $f(a) = 10$). Efter detta val tvingas vi låta $f(b) = 10 - f(a)$. Därefter har vi 8 valmöjligheter för $f(c)$, därefter 7 för $f(d)$, och så vidare tills vi kommer till $f(h)$ som kan väljas bland de 3 återstående elementen i B . Allt som allt finns alltså $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3$ möjliga funktioner.

Svar: $8^2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

6. Genom att utföra matrismultiplikationen får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = -3 \\ -2x - 2z = 1 \end{cases}$$

Gauss-Jordanelimination av systemets koefficientmatris ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \{\text{elementära radoperationer}\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Därför ges samtliga lösningar av $z = t$, $y = 3/4$, $x = -1/2 - t$.

$$\text{Svar: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - t \\ \frac{3}{4} \\ t \end{pmatrix}, \text{ där } t \in \mathbb{R}.$$

7. TENTAMEN har 8 bokstäver, varav T, E och N förekommer två gånger. Antalet följder överhuvudtaget som kan bildas av dessa bokstäver ges av multinomialkoefficienten

$$\binom{8}{2, 2, 2, 1, 1} = \frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 7!.$$

Av dessa följder finns det vissa som har de båda T:na bredvid varandra. Om vi betraktar ett dubbel-T som en enda bokstav, ser vi att antalet sådana följder ges av multinomialkoefficienten

$$\binom{7}{2, 2, 1, 1, 1} = \frac{7!}{2!2!1!1!1!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2.$$

Därför är det sökta antalet följder $7! - 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (4 - 1)$.

Svar: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2$.

8. Observera att

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

så att $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 0$. Enligt produktsatsen för determinanter har vi $\det((\mathbf{AC})^4(\mathbf{BC})^3(\mathbf{A}+\mathbf{B})) = \det((\mathbf{AC})^4(\mathbf{BC})^3) \cdot \det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0$. Eftersom en matris är inverterbar om och endast om dess determinant är nollskild saknar alltså den givna matrisen invers.

Svar: Matrisen är inte inverterbar.

9. a) Linjerna skär varandra om och endast om de har en gemensam punkt, d v s om följande ekvationssystem är lösbart:

$$\begin{cases} -3 - 2s = -2 + 3t, \\ -2 = -2t, \\ 9 + 3s = 1 + 2t. \end{cases}$$

Eftersom $s = -2$, $t = 1$ löser systemet, har de båda linjerna den gemensamma punkten $(-3 - 2 \cdot (-2), -2, 9 + 3 \cdot (-2)) = (-2 + 3 \cdot 1, -2 \cdot 1, 1 + 2 \cdot 1) = (1, -2, 3)$. $\square$

b) Linjen ℓ_3 går igenom den gemensamma punkten $(1, -2, 3)$ och har riktningsvektor som ges av kryssprodukten av ℓ_1 :s och ℓ_2 :s riktningsvektorer:

$$(-2, 0, 3) \times (3, -2, 2) = (6, 13, 4).$$

Svar: $(x, y, z) = (1 + 6t, -2 + 13t, 3 + 4t)$, $t \in \mathbb{R}$.

10. Vi använder induktionsprincipen. I basfallet $n = 0$ har vi påståendet $0 \cdot (0 + 1/3) = 0 \cdot 1^2/3$, vilket är sant.

Fixera nu $n \in \mathbb{N}$, och antag att $\sum_{k=0}^n k(k + \frac{1}{3}) = \frac{n(n+1)^2}{3}$. Det måste nu visas att $\sum_{k=0}^{n+1} k(k + \frac{1}{3}) = \frac{(n+1)(n+2)^2}{3}$. Notera nu att

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k(k + \frac{1}{3}) &= \sum_{k=0}^n k(k + \frac{1}{3}) + (n+1)(n+1 + \frac{1}{3}) = \frac{n(n+1)^2}{3} + (n+1)\frac{3n+4}{3} = \\ &= \frac{n^3+2n^2+n+3n^2+7n+4}{3} = \frac{n^3+5n^2+8n+4}{3} = \frac{(n+1)(n+2)^2}{3}, \end{aligned}$$

som vi ville. $\square$