5B1127 Matematik H1, VT 2004
Lappskrivning 1, version A

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv lösningarna på detta blad (använd baksidan om det behövs). Uppgifterna kan ge maximalt en bonuspoäng vardera till tentamen. Oläsliga lösningar eller svar utan motivering ger noll poäng. Lycka till!

Namn: **Personnummer:**

1. Skriv största gemensamma delaren till talen 735 och 539 som en linjärkombination av 735 och 539.

2. Visa att för alla $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$ gäller

$$2 \cdot \left(\sum_{i=2}^{n-1} 3^i \right) = 3^n - 9.$$

5B1127 Matematik H1, VT 2004
Lappskrivning 1, version B

Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv lösningarna på detta blad (använd baksidan om det behövs). Uppgifterna kan ge maximalt en bonuspoäng vardera till tentamen. Oläsliga lösningar eller svar utan motivering ger noll poäng. Lycka till!

Namn: **Personnummer:**

1. Skriv största gemensamma delaren till talen 1225 och 441 som en linjärkombination av 1225 och 441.

2. Visa att för alla $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$ gäller

$$3 \cdot \left(\sum_{i=2}^{n-1} 4^i \right) = 4^n - 16.$$

5B1127 Matematik H1, VT 2004
Lappskrivning 1, lösningsförslag

1. version A. Vi använder Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 735 &= 539 \cdot 1 + 196, \\ 539 &= 196 \cdot 2 + 147, \\ 196 &= 147 \cdot 1 + 49, \\ 147 &= 49 \cdot 3 + 0. \end{aligned}$$

Sista icke-försvinnande resten är 49, så $\gcd(735, 539) = 49$. Bakåtsubstituera nu i ovanstående uträkning: $49 = 196 - 147 = 196 - (539 - 196 \cdot 2) = 3 \cdot 196 - 539 = 3 \cdot (735 - 539) - 539 = 3 \cdot 735 - 4 \cdot 539$.

Svar: $\gcd(735, 539) = 3 \cdot 735 - 4 \cdot 539$. (Andra svar är förstås tänkbara.)

1. version B. Vi använder Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 1225 &= 441 \cdot 2 + 343, \\ 441 &= 343 \cdot 1 + 98, \\ 343 &= 98 \cdot 3 + 49, \\ 98 &= 49 \cdot 2 + 0. \end{aligned}$$

Sista icke-försvinnande resten är 49, så $\gcd(1225, 441) = 49$. Bakåtsubstituera nu i ovanstående uträkning: $49 = 343 - 98 \cdot 3 = 343 - (441 - 343) \cdot 3 = 4 \cdot 343 - 3 \cdot 441 = 4 \cdot (1225 - 2 \cdot 441) - 3 \cdot 441 = 4 \cdot 1225 - 11 \cdot 441$.

Svar: $\gcd(1225, 441) = 4 \cdot 1225 - 11 \cdot 441$. (Andra svar är förstås tänkbara.)

2. version A. Vi använder induktionsprincipen. Påståendet är sant för basfallet $n = 3$, ty då har vi $VL = 2 \cdot 3^2 = 18$ och $HL = 3^3 - 9 = 18 = VL$.

Fixera nu $n \in \{3, 4, \dots\}$, och antag att påståendet är sant för detta n, d v s att $2 \cdot \sum_{i=2}^{n-1} 3^i = 3^n - 9$. Vi måste nu visa att i så fall gäller $2 \cdot \sum_{i=2}^{n} 3^i = 3^{n+1} - 9$. Vi får:

$$2 \cdot \sum_{i=2}^{n} 3^i = 2 \cdot \sum_{i=2}^{n-1} 3^i + 2 \cdot 3^n = 3^n - 9 + 2 \cdot 3^n = 3 \cdot 3^n - 9 = 3^{n+1} - 9,$$

som önskat.

2. version B. Vi använder induktionsprincipen. Påståendet är sant för basfallet $n = 3$, ty då har vi $VL = 3 \cdot 4^2 = 48$ och $HL = 4^3 - 16 = 48 = VL$.

Fixera nu $n \in \{3, 4, \dots\}$, och antag att påståendet är sant för detta n, d v s att $3 \cdot \sum_{i=2}^{n-1} 4^i = 4^n - 16$. Vi måste nu visa att i så fall gäller $3 \cdot \sum_{i=2}^{n} 4^i = 4^{n+1} - 16$. Vi får:

$$3 \cdot \sum_{i=2}^{n} 4^i = 3 \cdot \sum_{i=2}^{n-1} 4^i + 3 \cdot 4^n = 4^n - 16 + 3 \cdot 4^n = 4 \cdot 4^n - 16 = 4^{n+1} - 16,$$

som önskat.