

5B1127 Matematik H1, VT 2004

Tentamen 26 maj

Inga hjälpmedel är tillåtna. Inklusive bonuspoäng kan man få 42 poäng. Betygsgränser: betyg 3: 17p, betyg 4: 22p, betyg 5: 27p. Uppgifterna är inte ordnade på något speciellt sätt. Skrivtid: 08.00-13.00. Klockan 13.00 kommer lösningförslag att finnas på kursens hemsida.

1. (3p) Uttryck det binära talet 10101000 i talbasen 5.
2. (4p) Låt ℓ_1 vara linjen med ekvationen $(x, y, z) = (1 + t, t, -2 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt ℓ_2 vara linjen med ekvationen $(x, y, z) = (4 + t, 3, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Finn det kortaste avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2 . (Koordinatsystemet är av ON-typ.)
3. (4p) Finn alla tal i $\mathbb{C}$ som löser ekvationen $z^5 - z^4 + z - 1 = 0$.
4. (3p) Visa att bland 501 stycken olika heltal mellan 1 och 1000 finns det alltid två vars summa är 1001.
5. (3p) Lös den diofantiska ekvationen $21x + 30y = 15$.
6. a) (2p) Finn inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
b) (2p) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 4y + 5z = -1, \\ x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

7. (3p) Definiera en talföljd $a_0, a_1, a_2, \dots$ genom $a_0 = 0$ och $a_k = 3a_{k-1} + 2$ om $k \geq 1$. Visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $a_n = 3^n - 1$.

8. (4p) Hur många följder kan man bilda av samtliga bokstäver i ordet SOMMARLOV om ingen följd får börja med en vokal? (Vokalerna är A och O.) Svaret får ges som en produkt av heltal.

9. (3p) Bestäm determinanten för matrisen $(\mathbf{ABC})^{-1}(\mathbf{CA})^2$, där

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. (3p) Finn en ekvation för det plan som innehåller punkten $(1, 2, 1)$ och linjen som har ekvationen $(x, y, z) = (1 + t, t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. (Koordinatsystemet är av ON-typ.)

Lycka till!

Lösningsförslag

1. Vi uttrycker först talet decimalt för enkelhets skull: $10101000_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^7 = 168_{10}$. Vi finner talets representation i basen 5 med divisionsalgoritmen:

$$\begin{array}{rcl} 168 & = & 5 \cdot 33 + 3, \\ 33 & = & 5 \cdot 6 + 3, \\ 6 & = & 5 \cdot 1 + 1, \\ 1 & = & 5 \cdot 0 + 1. \end{array}$$

Svaret är sekvensen av (principala) rester.

Svar: 1133.

2. Tag två punkter, en på vardera linjen. Vi väljer $P_1 = (1, 0, -2)$ på ℓ_1 och $P_2 = (4, 3, 0)$ på ℓ_2 . Den kortaste vektorn mellan linjerna är vinkelrät mot båda och ges alltså av den vinkelräta projektionen av $\overline{P_1 P_2} = (4 - 1, 3 - 0, 0 - (-2)) = (3, 3, 2)$ på kryssprodukten av riktningsvektorerna: $(1, 1, 3) \times (1, 0, 2) = (2, 1, -1)$. Denna projektion är

$$\text{Proj}_{(2,1,-1)}((3,3,2)) = \frac{(2,1,-1) \bullet (3,3,2)}{2^2 + 1^2 + (-1)^2} (2,1,-1) = \frac{7}{6} (2,1,-1).$$

Kortaste avståndet är normen av denna vektor som är $\frac{7}{6} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{7}{\sqrt{6}}$.

Svar: $\frac{7}{\sqrt{6}}$ längdenheter.

3. Man ser att $z = 1$ är en lösning. Faktorsatsen säger då att $(z - 1)$ delar $z^5 - z^4 + z - 1$. Vi utför divisionen, med liggande stolen eller genom inspektion, och får $z^5 - z^4 + z - 1 = (z - 1)(z^4 + 1)$. Övriga lösningar är alltså lösningarna till $z^4 = -1$. Vi skriver på polär form: $-1 = e^{i(\pi+2\pi n)}$ och $z^4 = r^4 e^{4iv}$, varför vi får $r = 1$ och $v = \pi/4 + \pi n/2$. Våra lösningar är alltså $e^{i\pi/4}$, $e^{3i\pi/4}$, $e^{5i\pi/4}$ och $e^{7i\pi/4}$. På rektangulär form är dessa i tur och ordning: $1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}i$, $-1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}i$, $-1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}i$ och $1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}i$.

Svar: $1, 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}i, -1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}i, -1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}i$ och $1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}i$.

4. Talen mellan 1 och 1000 kan delas in i 500 par där varje par har summa 1001 på följande sätt: $\{1, 1000\}, \{2, 999\}, \{3, 998\}, \dots, \{500, 501\}$. Postfacksprincipen säger att om 501 olika tal väljs ut, kommer två att tillhöra samma par, varför deras summa är 1001. $\square$

5. Skriv $\gcd(21, 30) = 3$ som en linjärkombination av 21 och 30 med Euklides algoritmen eller genom att observera att $3 = 3 \cdot 21 - 2 \cdot 30$. Därför är $15 = 5 \cdot 3 = 5 \cdot 3 \cdot 21 - 5 \cdot 2 \cdot 30$, varför $x = 15$, $y = -10$ är en lösning. Ansätt nu $x = 15 + k$, $y = -(10 + \ell)$. Insatt i ekvationen ger detta villkoret $21k = 30\ell$ som måste vara en multipel av $\text{lcm}(21, 30) = 210$. Alltså får vi $k = 10\alpha$ och $\ell = 7\alpha$, för $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Svar: $x = 15 + 10\alpha$, $y = -10 - 7\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. ("Snyggare", ekvivalent, svar: $x = 5 + 10\alpha$, $y = -3 - 7\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.)

6. a) Gauss-Jordan-eliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \{\text{elementära radoperationer}\} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 4 \end{array} \right),$$

så inversen är

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Låt $\mathbf{A}$ vara matrisen i uppgiftslydelsen i (a). Observera att ekvationssystemet är ekvivalent med matrisekvationen

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som har den unika lösningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Svar: $x = -2$, $y = -9$, $z = 7$.

(Alternativt kan vi lösa (a) och (b) samtidigt genom en simultan ekvationslösning.)

7. Vi använder induktionsprincipen. I basfallet $n = 0$ säger påståendet $0 = 3^0 - 1$, vilket är sant.

Fixera nu $n \in \mathbb{N}$, och antag att $a_n = 3^n - 1$. Vi ska visa att detta medför att $a_{n+1} = 3^{n+1} - 1$. Man får:

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 = 3(3^n - 1) + 2 = 3 \cdot 3^n - 3 + 2 = 3^{n+1} - 1,$$

som önskat. □

8. Antalet följder överhuvudtaget är lika med antalet sätt på vilka man kan ordna multimängden $\{O, O, M, M, S, A, R, L, V\}$. Detta antal ges av multinomialkoefficienten

$$\binom{9}{2, 2, 1, 1, 1, 1, 1} = \frac{9!}{2!2!1!1!1!1!1!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2.$$

Från detta antal ska vi dra bort antalet följder som börjar på A eller O. Antalet som börjar på A är lika med antalet ordningar av $\{O, O, M, M, S, R, L, V\}$ som är

$$\binom{8}{2, 2, 1, 1, 1, 1} = \frac{8!}{2!2!1!1!1!1!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2.$$

Antalet som börjar på O är lika med antalet ordningar av $\{O, M, M, S, A, R, L, V\}$ som är

$$\binom{8}{2, 1, 1, 1, 1, 1, 1} = \frac{8!}{2!1!1!1!1!1!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3.$$

Det sökta antalet är alltså $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 - 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 - 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot (9 \cdot 2 - 2 - 4) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 12 = 60480$.

Svar: $12 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3$.

9. Med hjälp av Sarrus regel eller utveckling längs lämpliga rader/kolonner får man $\det(\mathbf{A}) = 3$, $\det(\mathbf{B}) = -2$ och $\det(\mathbf{C}) = 2$. Produktregeln för determinanter ger nu $\det((\mathbf{ABC})^{-1}(\mathbf{CA})^2) = \frac{1}{3(-2) \cdot 2} \cdot (2 \cdot 3)^2 = \frac{36}{-12} = -3$.

Svar: -3 .

10. Låt $P = (1, 2, 1)$ och välj två punkter på linjen; ta exempelvis $Q = (1, 0, 0)$ och $R = (2, 1, 2)$. Planets normalvektor kan vi välja som kryssprodukten $\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (0, -2, -1) \times (1, -1, 1) = (-3, -1, 2)$. Planets ekvation är alltså $-3x - y + 2z + k = 0$ för något k . Eftersom planet ska innehålla $(1, 0, 0)$, måste $k = 3$.

Svar: $-3x - y + 2z + 3 = 0$.