Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Lösning till
Kontrollskrivning 2 den 10/10 kl 15.15-16.00
5B1132 Amelia 1 för P ht 2003
Version A

1. **Om det komplexa talet z får du veta att $z\bar{z} = 1$ och $z + \bar{z} = -1$. Kan du bestämma z?**

Lösning: Om $z = a + bi$ där a och b är reella tal så är $\bar{z} = a - bi$. Villkoret $z\bar{z} = 1$ betyder att $a^2 + b^2 = 1$ och $z + \bar{z} = -1$ betyder att $2a = -1$. Ur det senare sambandet får vi att $a = -1/2$ vilket insatt i det förra ger oss att $b = \pm\sqrt{3}/2$. Sammanfattningsvis får vi alltså att $z = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ eller $z = -1/2 - i\sqrt{3}/2$.

Svar: z kan vara vilket som helst av talen $-1/2 + i\sqrt{3}/2$ och $-1/2 - i\sqrt{3}/2$.

2. **Vilken punkt på planet $x + 3y - z = 6$ ligger närmast origo?**

Lösning: En normalvektor till planet är $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vidare är $(6, 0, 0)$ en punkt på planet. Ortsvektorn u till den punkt på planet som ligger närmast origo är då projektionen av vektorn $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ på normalvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (här bör en figur ritas!) dvs, med projektionsformeln:

$$u = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{6}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Det betyder att den sökta punktens koordinater är $(6/11, 18/11, -6/11)$.

Svar: $(6/11, 18/11, -6/11)$

3. **Lös ekvationen $z^3 - 5z^2 + 9z - 5 = 0$.**

Lösning: Vi ser direkt (eller genom att systematiskt pröva talen ± 1, ± 5) att $z = 1$ är en lösning. Enligt faktorsatsen betyder det att polynomet är delbart med $z - 1$. Vi utför divisionen och får $z^3 - 5z^2 + 9z - 5 = (z-1)(z^2 - 4z + 5)$. Med hjälp av lösningsformeln för andragradsekvationer fås nollställena till den andra faktorn som $z = 2 \pm i$. Sammanfattningsvis har alltså den givna ekvationen lösningarna 1, $2+i$, $2-i$.

Svar: 1, $2+i$, $2-i$