Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Lösning till

Kontrollskrivning 2 den 10/10 kl 15.15-16.00

5B1132 Amelia 1 för P ht 2003

Version B

1. **Om det komplexa talet z får du veta att $z\bar{z} = 1$ och $z + \bar{z} = 1$. Kan du bestämma z?**

Lösning: Om $z = a + bi$ där a och b är reella tal så är $\bar{z} = a - bi$. Villkoret $z\bar{z} = 1$ betyder att $a^2 + b^2 = 1$ och villkoret $z + \bar{z} = 1$ betyder att $2a = 1$. Ur det senare sambandet får vi att $a = 1/2$ vilket insatt i det förra ger oss att $b = \pm\sqrt{3}/2$. Sammanfattningsvis får vi alltså att $z = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$.

Svar: $z =$ kan vara vilket som helst av talen $1/2 + i\sqrt{3}/2$ och $1/2 - i\sqrt{3}/2$

2. **Lös ekvationen $2z^3 + 2z^2 - 4 = 0$.**

Lösning: Division på båda sidor med 2 ger den ekvivalenta ekvationen $z^3 + z^2 - 2 = 0$. Vi ser direkt (eller genom systematisk prövning av talen $\pm 1, \pm 2$) att $z = 1$ är en lösning. Enligt faktorsatsen betyder det att polynomet $z^3 + z^2 - 2$ är delbart med $z - 1$. Vi utför divisionen och får $z^3 + z^2 - 2 = (z - 1)(z^2 + 2z + 2)$. Med hjälp av lösningsformeln för andragradsekvationer fås nollställena till den andra faktorn som $z = -1 \pm i$. Sammanfattningsvis har alltså den givna ekvationen lösningarna 1, $-1 + i$, $-1 - i$.

Svar: 1, $-1 + i$, $-1 - i$

3. Vilken punkt på planet $x - y + 3z = 6$ ligger närmast origo?

Lösning: En normalvektor till planet är $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vidare är $(6, 0, 0)$ en punkt på planet. Ortsvektorn u till den punkt på planet som ligger närmast origo är då projektionen av vektorn $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ på normalvektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (här bör en figur ritas!) dvs:

$$u = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{6}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Det betyder att den sökta punktens koordinater är $(6/11, -6/11, 18/11)$.

Svar: $(6/11, -6/11, 18/11)$