Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Lösningsförslag till Kontrollskrivning 3 den 31/10

5B1132 Amelia 1 för P ht 2003

Version B

1. Derivera funktionen $\ln\sqrt{\sin x}$ (endast svar krävs).

Svar: Derivatan är (upprepad användning av kedjeregeln): $\dfrac{\cos x}{2\sin x}$.

---

2. Bevisa med induktion att $11^n - 1$ är jämnt delbart med 5 för alla positiva heltal n.

Lösning: Låt P vara påståendet att $11^n - 1$ är jämnt delbart med 5. Vi ska visa med induktion att P är sant för alla positiva heltal n. Steg 1: Om $n = 1$ säger påståendet P att $11^1 - 1$ är jämnt delbart med 5 vilket uppenbart är sant. Steg 2: Antag att P är sant för något heltal n_0, dvs antag att $11^{n_0} - 1$ är jämnt delbart med 5. Vi ska visa att i så fall är P också sant för $n = n_0 + 1$, dvs att $11^{n_0+1} - 1$ är jämnt delbart med 5. Nu är $11^{n_0+1} - 1 = 11 \cdot 11^{n_0} - 1 = 11 \cdot (11^{n_0} - 1) + 10$, som måste vara jämnt delbart med 5 eftersom båda termerna är det: parentesen är det enligt vårt antagande och 10:an är det uppenbart. Steg 3: Det följer med induktion att P är sant för alla positiva heltal n.

---

3. Låt funktionen f vara given enligt:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x}, & \text{då } x > 0 \\ 2, & \text{då } x = 0 \\ \dfrac{2\sin x}{x}, & \text{då } x < 0 \end{cases}$$

I vilka punkter är f kontinuerlig?

Lösning: För alla $x < 0$ är $f(x) = (2\sin x)/x$ som är ett elementärt uttryck definierat för alla x i intervallet. Alltså är f kontinuerlig i alla punkter $x < 0$. För alla $x > 0$ är $f(x) = \arctan(1/x)$ som är ett elementärt uttryck definierat för alla x i intervallet. Alltså är f kontinuerlig i alla punkter $x > 0$. Återstår den enda punkten $x = 0$. Här gäller att f är kontinuerlig om och endast om $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$, vilket särskilt betyder att både höger- och vänstergränsvärdet i origo ska vara lika med $f(0)$. Men $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan(1/x) = \pi/2$ medan $f(0) = 2$. Eftersom dessa inte är lika så är funktionen inte kontinuerlig i punkten $x = 0$.

Svar: f är kontinuerlig i alla punkter $x \neq 0$.