Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Lösningsförslag till Kontrollskrivning 4 den 21/11
5B1132 Amelia 1 för P ht 2003
Version A

1. Om funktionen f får du veta att den är deriverbar hur många gånger som helst på hela positiva x-axeln. Dessutom får du veta att $f(5) = 1$ $f'(5) = 0$ och $f''(5) = -4$. Beräkna

$$\lim_{x\to 5} \frac{f(x) - 1}{(x-5)^2}$$

Lösning: Taylors formel ger att $f(x) = 1 - 2(x-5)^2 + \mathcal{O}((x-5)^3)$. Vi får

$$\lim_{x\to 5} \frac{f(x) - 1}{(x-5)^2} = \lim_{x\to 5} \frac{-2(x-5)^2 + \mathcal{O}((x-5)^3)}{(x-5)^2} = \lim_{x\to 5} \frac{-2 + \mathcal{O}(x-5)}{1} = -2.$$

Svar: -2

2. Bestäm om möjligt största och minsta värdet av funktionen $f(x) = (x-1)e^{-x}$.

Lösning: Funktionen är kontinuerlig på hela x-axeln och eftersom $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ (standardgränsvärde) så saknar funktionen minsta värde. Om ett största värde finns så måste det antas i en punkt där derivata saknas eller i en punkt där derivatan är noll. Vi deriverar och får $f'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x} = (2-x)e^{-x}$, som är definierat för alla x. Eftersom $e^{-x} > 0$ för alla x ser vi att
$f'(x) > 0$ när $x < 2$
$f'(2) = 0$ och
$f'(x) < 0$ när $x > 2$.
Detta ger oss att f är strängt växande på intervallet $x < 2$ och strängt avtagande på intervallet $x > 2$ och har ett lokalt max, som då också måste vara globalt, när $x = 2$. Funktionens största värde är alltså $f(2) = e^{-2}$.

Svar: Största värdet är e^{-2}, minsta värde saknas.

3. Vid tillverkningen av en viss keramisk produkt är avsvalningsprocessen väsentlig. När produkten kommer ut ur ugnen håller den en temperatur på ungefär 800 grader celsius och sedan svalnar den i en takt som är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan det omgivande rummet och produkten själv. Din vän Puttrick som läst matte på Smockholts universitet föreslår följande matematiska modell för förloppet:

$$y'(t) = \frac{y}{3} - 20,$$

där $y(t)$ betyder produktens temperatur vid tiden t. Finn den lösning till Puttricks differentialekvation som uppfyller att $y(0) = 800$ och diskutera om Puttricks modell är realistisk.

Lösning: Lösningen y till $y' - \frac{1}{3}y = -20$ fås som $y = y_h + y_p$, där y_h är allmänna lösningen till mosvarande homogena ekvation och y_p är någon partikulärlösning till den givna ekvationen.

Först söks y_h, dvs allmänna lösningen till $y' - \frac{1}{3}y = 0$. Den karaktäristiska ekvationen $r - 1/3 = 0$ har lösning $r = 1/3$, så $y_h = Ae^{t/3}$, där A är en godtycklig reell konstant. Sedan söks y_p. Eftersom högerledet är en konstant ansätter vi $y_p = C$. Då är $y_p' = 0$ och $y_p' - y_p/3 = -C/3$ vilket är lika med -20 precis när $C = 60$. Vi kan alltså ta $y_p = 60$.

Allmänna lösningen till Puttricks ekvation är alltså $y(t) = Ae^{t/3} + 60$ och vi ser att $y(0) = 800$ om och endast om $A + 60 = 800$, dvs $A = 740$.

Den lösning till Puttricks ekvation som uppfyller det givna begynnelsevillkoret är alltså $y(t) = 740e^{t/3} + 60$.

Eftersom $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ så kan detta inte vara en realistisk beskrivning av temperaturen hos vår produkt. Produktens temperatur måste ju rimligen avta och alltmer närma sig rumstemperatur ju längre tiden går.