Institutionen för Matematik
KTH
Lars Filipsson

Kontrollskrivning 5 den 5/12 kl 14.15-15.15 (obs 60 minuter)

5B1132 Amelia 1 för P ht 2003

Version B

Uppgift 1 kan ge maximalt 1 poäng, uppgifterna 2 och 3 kan ge maximalt 2 poäng vardera. Tänk på att skriva korrekt genomförda och tydligt presenterade resonemang. Inga hjälpmedel. Lycka till!

1. Avgör om funktionen $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{3\sin^2 x + 2\cos^2 x}}$ är integrerbar på intervallet $[0, \pi/3]$. Obs: det finns inga krav på att integralen ska räknas ut.

Lösning: Funktionen $f(x)$ är given av ett elementärt uttryck som är definierat för alla x i det slutna och begränsade intervallet $[0, \pi/3]$. Alltså är funktionen kontinuerlig där. Det följer då att funktionen är integrerbar på intervallet.

2. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2 - \sin x}\, dx$.

Lösning: Vi använder variabelsubstitution, närmare bestämt sätter vi $t = \sin x$ och får:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2-\sin x}\, dx &= \{t = \sin x,\, dt = \cos x dx,\, x = 0 \Leftrightarrow t = 0,\, x = \pi/2 \Leftrightarrow t = 1\} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2-t}\, dt \\ &= [-\ln(2-t)]_0^1 \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

Svar: $\ln 2$

3. Bestäm arean av det område som begränsas av kurvan $y = x\sqrt{3-x}$ och positiva x-axeln.

Lösning: Vi ser att kurvan $y = x\sqrt{3-x}$ skär x-axeln då $x = 0$ och då $x = 3$, samt ligger ovanför x-axeln om $0 < x < 3$. Vidare är uttrycket odefinierat för alla $x > 2$. Den sökta arean blir alltså

$$\begin{aligned}
\int_0^3 x\sqrt{3-x}\,dx &= \int_0^3 (-(3-x)\sqrt{3-x} + 3\sqrt{3-x})\,dx \\
&= \int_0^3 (-(3-x)^{3/2} + 3(3-x)^{1/2})\,dx \\
&= \left[\frac{2}{5}(3-x)^{5/2} - 2(3-x)^{3/2}\right]_0^3 \\
&= 6\sqrt{3} - \frac{18\sqrt{3}}{5} = \frac{12\sqrt{3}}{5}.
\end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{12\sqrt{3}}{5}$