Dagens uppgifter, vecka 46

5B1132 Amelia 1 för T ht 2003

1. Bestäm Taylorutvecklingen av 4 ordning till funktionen $f(x) = x^4$ kring punkten $a = 1$. Ange resttermen på Lagrangesform.

2. Bestäm MacLaurinutvecklingen av 3 ordning till $f(x) = (x+2)\cos 2x$

3. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{\sin 2x - 2x}$

4. Beräkna gränsvärdena a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)}$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)}$

5. Bestäm alla sneda såväl som lodräta asymptoter till kurvan $y = \frac{2x^3 - 2}{x(x+2)}$.

6. Ange den lösningen till differentialekvationen $y'' - 5y' + 6y = 0$ som uppfyller $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

Ledtrådar

1. Antingen derivera funktionen 5 ggr och sätt in i formeln

$$f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{24}(x-1)^4+\frac{f^{(5)}(c)}{120}(x-1)^5$$

Eller sätta in $x=t+1$, utveckla och återsubstituera $t=(x-1)$

2. Sätt in MacLaurinutvecklingen av 2 ordning till $\cos 2x$, sedan utveckla och hyfsa med ordokalkyl.

3. Sätt in MacLaurinutvecklingen av 3 ordning till både $\sin 2x$ och e^{2x}. (Det blir enklare och man först substituerar $t=2x$)

4. Använd L'Hospitals regel $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0} eller \frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

5. En lodrät asymptot $x=a$ förekommer om $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ (här då nämnaren är 0). En sned asymptot $y=kx+b$ förekommer om $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x}=k$ samt $\lim_{x\to a} f(x)-kx=b$.

6. Den karakteristiska ekvationen är $r^2-5r+6=0$. Den almänna lösningen är $y=Ae^{3x}-Be^{2x}$

Facit

1. $1+4(x-1)+6(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4$

2. $2+x-4x^2-2x^3+O(x^4)$

3. -1

4. a) 0 b) 2

5. De lodräta $x=0$ och $x=-2$. En sned $y=2x-4$

6. $y=e^{3x}-e^{2x}$