Dagens uppgifter, vecka 47

5B1132 Amelia 1 för T ht 2003

1. Ange den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - 10y' + 29y = 8e^{5x} + 20e^{x}$
2. Ange den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = \sin x$
3. Ange den allmänna lösningen till differentialekvationen $y^{(4)} - 8y''' + 12y'' = 48e^{2x}$
4. Beräkna $\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$
5. Beräkna $\int \left(\cos(3x-5) + \frac{1}{\cos^2(5x-3)} \right) dx$
6. Beräkna $\int \frac{x^4 dx}{1+x^{10}}$

Ledtrådar

1. Rötterna till den karakteristiska ekvationen är $r_{1,2} = 5 \pm 2i$. Högerledet svarar mot rötterna $r_3 = 5, r_4 = 1$. Då rötterna är olika sökes enstaka lösningen på formen $Ce^{5x} + De^x$

2. Rötterna till den karakteristiska ekvationen är $r_1 = 1,\ r_2 = 2$. Högerledet svarar mot rötterna $r_{3,4} = \pm i$ (oavsett att sin$x$ förekommer utan cos$x$). Då rötterna är olika sökes enstaka lösningen på formen $C \sin x + D \cos x$

3. Rötterna till den karakteristiska ekvationen är $r_{1,2} = 0(\mathit{dubbelrot}),\ r_3 = 2,\ r_4 = 6$. Högerledet svarar mot roten $r_5 = 2$. Då roten $r_5 = 2$ upprepas ska motsvarande lösningen multipliceras med x, dvs sökes enstaka lösningen på formen Cxe^{2x}

4. Skriv om $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ som en potensfunktion och använd sedan $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

5. Använd formlerna

$$\int (f+g)dx = \int f dx + \int g dx,\ \int \cos(Ax+B)dx = -\frac{1}{A}\sin(Ax+B),\ \int \frac{dx}{\cos^2(Ax+B)} = -\frac{1}{A}\tan(Ax+B)$$

6. Använd substitutionen $t = x^5$ och formeln $\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C$.

Facit

1. $y = (A\sin 2x + B\cos 2x)e^{5x} + 2e^{5x} + e^{x}$

2. $y = Ae^{x} + Be^{2x} + 0{,}1\sin x + 0{,}3\cos x$

3. $y = A_1 + A_2 x + A_3 e^{2x} + A_4 e^{6x} - 3xe^{2x}$

4. 1

5. $-\dfrac{\sin(3x-5)}{3} + \dfrac{\tan(5x-3)}{5} + C$

6. $\dfrac{1}{5}\arctan x^{5} + C$