Dagens uppgifter, vecka 49

5B1132 Amelia 1 för T ht 2003

1. Beräkna arean av det ändliga området som begränsas av kurvorna
$x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2},\ y = x\cos 2x$ samt av x-axeln.

2. Beräkna arean av det ändliga området som begränsas av kurvorna
$y = x^2 - \sqrt{1+\sin x}$, $y = x + 2 - \sqrt{1+\sin x}$

3. Beräkna den volym som uppkommer vid rotation runt x-axeln av det område i xy-planet som begränsas av kurvorna $x = 0,\ x = \pi,\ y = \sin\dfrac{x}{2}$ samt av x-axeln.

4. Beräkna längden av grafkurvan $y = 2x\sqrt{x},\ 0 \le x \le 7$

5. Beräkna den största och den minsta möjliga Riemansummorna till integralen $\int_1^2 3x^2 dx$ då intervallet delas upp i 10 lika stora delar. Beräkna summornas mellanvärde och hur många procent avviker Riemansummorna från mellanvärdet.

6. Beräkna närmevärde till integralen $\int_0^{0,5} e^{2x} dx$ genom att byta funktionen mot MacLaurinspolynom av ordning 4 och integrera polynomet. Uppskatta felet.

7. Beräkna om integralen är konvergent eller visa att den är divergent $\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2(x^2+1)}$

8. Beräkna om integralen är konvergent eller visa att den är divergent $\int_1^{2} \dfrac{(x^2+1)dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$

Ledtrådar

1. Kurvan $y = x\cos 2x$ skär x-axeln i $x = \dfrac{\pi}{4}$ och ligger ovanför axeln då $x < \dfrac{\pi}{4}$ och under axeln då $x > \dfrac{\pi}{4}$. Så är arean $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$.

2. Kurvorna skär varandra i $x = -1$ och $x = 2$. Då $x + 2 > x^2$ för $-1 < x < 2$ är arean

$$\int_{-1}^{2} \left(x + 2 - \sqrt{1+\sin x}\right) - \left(x^2 - \sqrt{1+\sin x}\right)dx = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right)dx$$

3. $V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 \dfrac{x}{2}\,dx$

4. $L = \int_0^7 \sqrt{1 + \left(\left(2x\sqrt{x}\right)'\right)^2}\,dx$

5. Den minsta summan är $3\left(1{,}0^2 + 1{,}1^2 + 0{,}2^2 + \ldots + 1{,}9^2\right)\cdot 0{,}1$, den största är $3\left(1{,}1^2 + 1{,}2^2 + \ldots + 1{,}9^2 + 2{,}0^2\right)\cdot 0{,}1$

6. $e^{2x} = 1 + 2x + \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dfrac{(2x)^4}{4!} + R(x)$. Då $\left(e^{2x}\right)^{(5)} = 32e^{2x}$ är Lagranges resterm $R(x) = \dfrac{32e^{2c}}{5!}x^5 < \dfrac{4e}{15}x^5$. Integrationsfel $\int_0^{0{,}5} R(x)\,dx < \int_0^{0{,}5} \dfrac{4e}{15}x^5\,dx$

7. Dela upp integranden i partialbråk, bestäm en primitiv funktion och beräkna gränsvärdet då $x \to \infty$

8. $\dfrac{\left(x^2+1\right)}{(x-1)\sqrt{x-1}} > \dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ så det går bra att undersöka om $\int_1^2 \dfrac{dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ är divergent.

Facit

1. $\dfrac{\pi}{4}$

2. 4,5

3. $\dfrac{\pi^2}{2}$

4. $\dfrac{1022}{27}$

5. $S_{\min} = 6{,}555 \quad S_{\max} = 7{,}455 \quad Mellanvärde = 7{,}005 \quad Avvikelse = \pm 6{,}5\%$

6. $Närmevärde = 0{,}8575 \;\; Integrationsfel \; < 0{,}0018$

7. Konvergent $1 - \dfrac{\pi}{4}$

8. Divergent