Institutionen för matematik, KTH
5B1132 Amelia 1 för T. Lappskrivning nr 2, 2003-09-12

Höger Bestäm den enhetsvektorn $\bar{e}$ som är ortogonal mot vektorerna $\bar{u} = (1,6,4)$ och $\bar{v} = (-3,-2,2)$ samt har en positiv koordinat i *x*-led.

Förslag till lösning.

Vi använder kryssprodukten för att få en vektorn som är ortogonal mot två givna: $\bar{w} = \bar{v} \times \bar{u} = (-3,-2,2) \times (1,6,4) = (-2 \cdot 4 - 2 \cdot 6, 2 \cdot 1 - (-3) \cdot 4, -3 \cdot 6 - 1 \cdot (-2)) = (-20,14,-16)$

Beloppet till $|\bar{w}| = |(-20,14,-16)| = |2(-10,7,-8)| = 2\sqrt{10^2 + 7^2 + 8^2} = 2\sqrt{213} \neq 1$. För att få en enhetsvektor måste vektorn $\bar{w}$ normeras: $\frac{\bar{w}}{|\bar{w}|} = \frac{2(-10,7,-8)}{2\sqrt{213}} = \left(-\frac{10}{\sqrt{213}}, \frac{7}{\sqrt{213}}, -\frac{8}{\sqrt{213}}\right) = \left(-\frac{10\sqrt{213}}{213}, \frac{7\sqrt{213}}{213}, -\frac{8\sqrt{213}}{213}\right)$.

Då den första koordinaten är negativ, ska man byta tecken hos vektorn:

$$\bar{e} = -\frac{\bar{w}}{|\bar{w}|} = \left(\frac{10\sqrt{213}}{213}, -\frac{7\sqrt{213}}{213}, \frac{8\sqrt{213}}{213}\right)$$

Facit: Få uppges på flera sätt, alla är korrekta, bl.a.:

$$\left(\frac{10\sqrt{213}}{213}, -\frac{7\sqrt{213}}{213}, \frac{8\sqrt{213}}{213}\right) \text{ eller } \left(\frac{10}{\sqrt{213}}, -\frac{7}{\sqrt{213}}, \frac{8}{\sqrt{213}}\right) \text{ eller } \frac{(10,-7,8)}{\sqrt{213}} \text{ eller } \left(\frac{20}{\sqrt{852}}, -\frac{14}{\sqrt{852}}, \frac{16}{\sqrt{852}}\right)$$

Kontroll: Skalärprodukten av $\bar{e}$ med såväl $\bar{u}$ som $\bar{v}$ måste vara 0:

$$\frac{10}{\sqrt{213}} \cdot 1 - \frac{7}{\sqrt{213}} \cdot 6 + \frac{8}{\sqrt{213}} \cdot 4 = \frac{10}{\sqrt{213}} \cdot (-3) - \frac{7}{\sqrt{213}} \cdot (-2) + \frac{8}{\sqrt{213}} \cdot 2 = 0$$

samt beloppet till $\bar{e}$ måste vara 1: $\sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{213}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{213}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{213}}\right)^2} = \sqrt{\frac{10^2 + 7^2 + 8^2}{213}} = \sqrt{\frac{213}{213}} = 1$

Vänster Bestäm den enhetsvektorn $\bar{e}$ som är ortogonal mot vektorerna $\bar{u} = (4,9,3)$ och $\bar{v} = (-4,1,3)$ samt har en positiv koordinat i *x*-led.

Förslag till kort lösning.

$\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v} = (4,9,3) \times (-4,1,3) = (24,-24,40)$ är ortogonal både mot $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

Beloppet till $|\bar{w}| = |(24,-24,40)| = |8(3,-3,5)| = 8\sqrt{3^2 + 3^2 + 5^2} = 8\sqrt{43}$. För att få en enhetsvektor måste vektorn $\bar{w}$ normeras. Enhetsvektorn $\bar{e} = \frac{\bar{w}}{|\bar{w}|} = \frac{8(3,-3,5)}{8\sqrt{43}} = \left(\frac{3\sqrt{43}}{43}, -\frac{3\sqrt{43}}{43}, \frac{5\sqrt{43}}{43}\right)$ har en positiv *x*-koordinat – vilken tur!

Facit: Få uppges på flera sätt, alla är korrekta, bl.a.:

$$\left(\frac{3\sqrt{43}}{43}, -\frac{3\sqrt{43}}{43}, \frac{5\sqrt{43}}{43}\right) \text{ eller } \left(\frac{3}{\sqrt{43}}, -\frac{3}{\sqrt{43}}, \frac{5}{\sqrt{43}}\right) \text{ eller } \frac{(3,-3,5)}{\sqrt{43}} \text{ eller } \left(\frac{24}{\sqrt{2752}}, -\frac{24}{\sqrt{2752}}, \frac{40}{\sqrt{2752}}\right)$$

Kontroll: Skalärprodukten av $\bar{e}$ med såväl $\bar{u}$ som $\bar{v}$ måste vara 0 samt beloppet till $\bar{e}$ måste vara 1.