Institutionen för matematik, KTH
5B1132 Amelia 1 för T. Lappskrivning nr 5, 2003-10-03, klockan 10.40-11.00

Vänster) Beräkna $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15}$ (svaret ska ges på formen $a+bi$).

Facit. -1

Förslag till lösning.

Vi betecknar basen $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ och skriver det om på exponentform $z=re^{i\varphi}$ där $r=|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ och $\varphi=\arg z$. Då z ligger i första kvadranten och $\cos\varphi=\frac{1/2}{r}=\frac{1}{2}$ är $\varphi=60°$. Nu kan vi beräkna

$$z^{15}=r^{15}e^{15\varphi i}=1e^{900°i}=\cos 900°+i\cdot\sin 900°=$$
$$=\cos(2\cdot 360°+180°)+i\cdot\sin(2\cdot 360°+180°)=\cos(180°)+i\cdot\sin(180°)=-1+i\cdot 0=-1$$

Alternativt sätt – se lösningen till högerversionen.

Höger) Beräkna $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{20}$ (svaret ska ges på formen $a+bi$).

Facit. -1

Förslag till lösning.

Lägg märke att $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 i^2=\frac{1}{2}-i-\frac{1}{2}=-i$ och att $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4=(-i)^2=-1$. Således $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{20}=\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4\right)^5=(-1)^5=-1$

Alternativt sätt – se lösningen till vänsterversionen.