Institutionen för matematik, KTH
5B1132 Amelia 1 för T. Lappskrivning nr 9, 2003-10-31, klockan 9.15-9.35

Vänster) Beräkna derivatans värde $f'(2)$ för funktionen $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-5}}{(3-x)^2}$

Facit. 3,5

Förslag till lösning.

$$df=\frac{(3-x)^2\cdot d(\sqrt{3x-5})-\sqrt{3x-5}\cdot d(3-x)^2}{\left((3-x)^2\right)^2}=\frac{(3-x)^2\cdot\dfrac{d(3x-5)}{2\sqrt{3x-5}}-\sqrt{3x-5}\cdot 2(3-x)d(3-x)}{(3-x)^4}=$$

$$=\frac{(3-x)^2\cdot\dfrac{3dx}{2\sqrt{3x-5}}-\sqrt{3x-5}\cdot 2(3-x)(-dx)}{(3-x)^4}$$

$$f'(x)=\frac{df}{dx}=\frac{(3-x)^2\cdot\dfrac{3}{2\sqrt{3x-5}}+\sqrt{3x-5}\cdot 2(3-x)}{(3-x)^4}$$

$$f'(2)=\frac{(3-2)^2\cdot\dfrac{3}{2\sqrt{3\cdot 2-5}}+\sqrt{3\cdot 2-5}\cdot 2(3-2)}{(3-2)^4}=\frac{3}{2}+2=3{,}5$$

Alternativt sätt – se lösningen till högerversionen

Höger) Beräkna derivatans värde $f'(3)$ för funktionen $f(x)=\dfrac{(2-x)^2}{\sqrt{2x-5}}$

Facit. 1

Förslag till lösning

Vi använder en logaritmsk derivata $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

$$\ln f(x)=\ln\frac{(2-x)^2}{\sqrt{2x-5}}=\ln(2-x)^2-\ln\sqrt{2x-5}=\ln(x-2)^2-\ln(2x-5)^{1/2}=2\ln(x-2)-\frac{1}{2}\ln(2x-5)$$

Vi deriverar det första och det sista

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=2\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-5)'}{2x-5}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-5}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{2x-5}$$

Insättningen x=3 ger oss

$\dfrac{f'(3)}{f(3)}=\dfrac{2}{3-2}-\dfrac{1}{2\cdot 3-5}=1$. Då $f(3)=\dfrac{(2-3)^2}{\sqrt{2\cdot 3-5}}=1$ är $f'(3)=f(3)\cdot 1=1$

Alternativt sätt – se lösningen till vänsterversionen.