Institutionen för matematik, KTH
5B1132 Amelia 1 för T. Lappskrivning nr 12, 2003-11-21, klockan 10.40-11.00

Vänster) Ange den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' + 3y = 10\sin x$

Facit. $y = Ae^{-3x} + 3\sin x - \cos x$**,** där A är en godtycklig konstant.

Förslag till lösning.

Lösningen är $y = y_h + y_p$, där y_h är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y' + 3y = 0$ och y_p är någon partikulär lösning. Den karakteristika ekvationen $r + 3 = 0$ har roten $r_1 = -3$ vilket ger oss $y_h = Ae^{-3x}$ där A är en godtycklig konstant. Högerledet $10\sin x$ svarar mot karakteristiska rötter $r_{2,3} = \pm i$. Eftersom de är skilda från den tidigare roten sökes en partikulär lösning på formen $y_p = C\sin x + D\cos x$ med obestämda koefficienter C och D. Insättningen i ekvationen ger då

$$(C\sin x + D\cos x)' + 3(C\sin x + D\cos x) = 10\sin x$$
$$(C\cos x - D\sin x) + 3(C\sin x + D\cos x) = 10\sin x$$
$(3C - D)\sin x + (C + 3D)\cos x = 10\sin x$. Det sista stämmer bara om

$$\begin{cases} 3C - D = 10 \\ C + 3D = 0 \end{cases}$$

Detta system har lösningar $C = 3,\ D = -1$, vilket ger $y_p = 3\sin x - \cos x$

Höger) Ange den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' - 2y = 10\cos x$

Facit. $y = Ae^{2x} + 2\sin x - 4\cos x$ där A är en godtycklig konstant.

Förslag till lösning.

Lösningen är $y = y_h + y_p$, där y_h är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y' - 2y = 0$ och y_p är någon partikulär lösning. Den karakteristika ekvationen $r - 2 = 0$ har roten $r_1 = 2$ vilket ger oss $y_h = Ae^{2x}$ där A är en godtycklig konstant. Högerledet $10\cos x$ svarar mot karakteristiska rötter $r_{2,3} = \pm i$. Eftersom de är skilda från den tidigare roten sökes en partikulär lösning på formen $y_p = C\sin x + D\cos x$ med obestämda koefficienter C och D. Insättningen i ekvationen ger då

$$(C\sin x + D\cos x)' - 2(C\sin x + D\cos x) = 10\cos x$$

$$(C\cos x - D\sin x) - 2(C\sin x + D\cos x) = 10\cos x$$

$(-2C - D)\sin x + (C - 2D)\cos x = 10\cos x$. Det sista stämmer bara om

$$\begin{cases} -2C - D = 0 \\ C - 2D = 10 \end{cases}$$

Detta system har lösningar $C = 2, D = -4$, vilket ger $y_p = 2\sin x - 4\cos x$