

Institutionen för matematik, KTH

5B1132 Amelia 1 för T. Lappskrivning nr 13, 2003-11-28, klockan 10.40-11.00

Vänster) Beräkna $\int \frac{x^3}{x^2-9} dx$

Facit. $\frac{x^2}{2} + \frac{9}{2} \ln|x^2-9| + C = 0,5x^2 + 4,5\ln|x-3| + 4,5\ln|x+3| + C$, där C är en godtycklig konstant.

Förslag till lösning.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2-9} dx &= \int \frac{x^2}{x^2-9} x dx = \left[t = x^2 - 9 \Rightarrow dt = 2x dx, x^2 = t + 9 \right] = \int \frac{t+9}{t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{9}{t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} (t - 9 \ln|t|) + C = \frac{1}{2} (x^2 - 9 - 9 \ln|x^2 - 9|) + C = 0,5x^2 - 4,5 \ln|x^2 - 9| + C \end{aligned}$$

En annan lösning är möjlig, se till ex. lösningen till den högra varianten.

Höger) Beräkna $\int \frac{x^3}{x^2 - 25} dx$

Facit. $\frac{x^2}{2} + \frac{25}{2} \ln|x^2 - 25| + C = 0,5x^2 + 12,5 \ln|x - 5| + 12,5 \ln|x + 5| + C$, där C är en godtycklig konstant.

Förslag till lösning.

Genom divisionen med rest kan man skriva om integranden så här

$$\frac{x^3}{x^2 - 25} = x + \frac{25x}{x^2 - 25}. \text{ Då } x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5) \text{ kan man även dela upp bråket } \frac{25x}{x^2 - 25} \text{ i partial}$$

bråk på formen $\frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 5}$.

$$25x = A(x + 5) + B(x - 5)$$

$$x = 5 \quad 25 \cdot 5 = A(5 + 5) + B(5 - 5) \Rightarrow 125 = 10A \Rightarrow A = 12,5$$

$$x = -5 \quad 25 \cdot (-5) = A(-5 + 5) + B(-5 - 5) \Rightarrow -125 = -10B \Rightarrow B = 12,5$$

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 25} dx = \int \left(x + \frac{12,5}{x - 5} + \frac{12,5}{x + 5} \right) dx = 0,5x^2 + 12,5 \ln|x - 5| + 12,5 \ln|x + 5| + C$$

En annan lösning är möjlig, se till ex. lösningen till den vänstra varianten.