Institutionen för matematik, KTH
5B1132 Amelia 1 för T. Lappskrivning nr 14, 2003-12-05, klockan 10.40-11.00

Vänster) Beräkna arean av det ändliga området som begränsas av kurvorna
$x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \pi$, $y = x\cos x$ samt av x-axeln

Facit. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{1}{2}$

Förslag till lösning.

$x\cos x = 0$ om x=0 eller $\cos x = 0$ dvs $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ där k är ett godtyckligt heltal. Inget av de nollställena ligger i integrationsintervallet, så grafkurvan $y = x\cos x$ skär inte x-axeln mellan $\frac{2\pi}{3}$ och π. Då i $x = \pi$ är $x\cos x = -\pi < 0$ så ligger kurvan $y = x\cos x$ *under* x-axeln, dvs är $y = 0$ tacket och $y = x\cos x$ golvet till området. Således (vi använder partiell integration)

$$A = \int_{2\pi/3}^{\pi} (0 - x\cos x)dx = -\int_{2\pi/3}^{\pi} x\cos x dx = \left[\begin{array}{c} F' = \cos x \Rightarrow F = \sin x \\ g = x \Rightarrow g' = 1 \end{array}\right] = -\left([x\sin x]_{2\pi/3}^{\pi} - \int_{2\pi/3}^{\pi} \sin x dx \right) =$$

$$= -\left(\pi\sin\pi - \frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\right) - [\cos x]_{2\pi/3}^{\pi} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \left(\cos\pi - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{1}{2}$$

Höger) Beräkna arean av det ändliga området som begränsas av kurvorna $x=\pi,\ x=\frac{4\pi}{3},\ y=x\cos x$ samt av x-axeln.

Facit. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{1}{2}$

Förslag till lösning.

Samma resonemang som tidigare ger

$$A=-\int_{\pi}^{4\pi/3} x\cos x dx=-[x\sin x+\cos x]_{\pi}^{4\pi/3}=-\left(\left(\frac{4\pi}{3}\sin\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right)-(\pi\sin\pi+\cos\pi)\right)=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}-\frac{1}{2}$$