Institutionen för matematik, KTH
5B1132 Amelia 1 för T. Lappskrivning nr 15, 2003-12-10, klockan 15.40-16.00

Vänster) Beräkna arean av det oändliga området som begränsas av kurvan $y = \frac{4}{\sqrt{x}(x+1)}$,

samt av de positiva halvorna av både x- och y-axeln.
Facit. 4π

Förslag till lösning.

Då $\frac{4}{\sqrt{x}(x+1)} > 0$ för $x>0$ kan området beskrivas genom olikheterna $0 \le x < \infty, 0 < y < \frac{4}{\sqrt{x}(x+1)}$.
Arean=

$$= \int_0^\infty \frac{4}{\sqrt{x}(x+1)}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \\ t = 0\, om\, x = 0, t = \infty\, om\, x = \infty \end{bmatrix} = \int_0^\infty \frac{4 \cdot 2tdt}{t(t^2+1)} = 8\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = 8[\arctan t]_0^\infty = 8\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 4\pi$$

Höger) Beräkna arean av det oändliga området som begränsas av kurvan $y=\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$, den positiva delen av x-axeln samt av en sträcka på linjen $x=1$. (Obs! Området är inte begränsat av y-axeln).

Facit. $\frac{\pi}{2}$

Förslag till lösning.

Då $\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}>0$ för $x>0$ kan området beskrivas genom olikheterna $1\le x<\infty$, $0<y<\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$.

Arean=

$$=\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx=\left[\begin{array}{c} t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2\Rightarrow dx=2tdt \\ t=1\,om\,x=1, t=\infty\,om\,x=\infty \end{array}\right]=\int_1^\infty \frac{2tdt}{t(t^2+1)}=2\int_1^\infty \frac{dt}{t^2+1}=2[\arctan t]_1^\infty=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$