Institutionen för matematik, KTH
5B1133 Amelia 2 för T. Lappskrivning nr 3, 2004-02-06

Vänster) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen M=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. Bestäm en matris C sådan att $C^{-1}MC$ är en diagonal matris och ange denna.

Facit. Egenvärdena 3 och 1, egenvektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1}MC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Förslag till lösning.

Egenvärden fås som rötter till den karakteristika ekvationen
$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 6 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\lambda)(1-\lambda) - 6\cdot 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$. För att hitta en egenvektor $\bar{v}_1$ som svarar mot $\lambda_1 = 3$ sätter man in $\lambda = 3$ i matrisekvationen $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 6 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Då fås systemet $\begin{cases} 0\cdot x + 0\cdot y = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$ som har oändligt många lösningar. Dock är alla lösningarna proportionella mot $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sätter man in $\lambda = 1$ i matrisekvationen , får man systemet $\begin{cases} 2x + 0\cdot y = 0 \\ 6x + 0\cdot y = 0 \end{cases}$ med alla lösningar proportionella mot $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Av de två egenvektorerna tagna som kolonner bildas matrisen $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, medan diagonalmatrisen $C^{-1}MC$ fås utan ytterligare beräkningar av de egenvärdena: $C^{-1}MC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Höger) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen M=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Bestäm en matris C sådan att $C^{-1}MC$ är en diagonal matris och ange denna.

Facit. Egenvärdena 1 och 6, egenvektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C^{-1}MC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Förslag till lösning.

Egenvärden fås som rötter till den karakteristika ekvationen

$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(6-\lambda) - 0 \cdot 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$. För att hitta en egenvektor $\bar{v}_1$ som svarar mot $\lambda_1 = 1$ sätter man in $\lambda = 1$ i matrisekvationen $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Då fås systemet $\begin{cases} 0 \cdot x + 3y = 0 \\ 0 \cdot x + 5y = 0 \end{cases}$ som har oändligt många lösningar. Dock är alla lösningarna proportionella mot $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sätter man in $\lambda = 6$ i matrisekvationen , får man systemet $\begin{cases} -5x + 3y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$ med alla lösningar proportionella mot $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Av de två egenvektorerna tagna som kolonner bildas matrisen $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, medan diagonalmatrisen $C^{-1}MC$ fås utan ytterligare beräkningar av de egenvärdena: $C^{-1}MC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.