Uppgifter till vecka 6

5B1133 Amelia 2 för T vt 2004

1. Bestäm rella egenvärden och reella egenvektorer till linjära avbildningarna
a) Planets vridning 60° i positiv led kring origo. b) Planets vridning 180° kring origo. c) Rymdens vridning i negativ led 60° kring y-axeln.

2. Bestäm reella egenvärden och reella egenvektorer till matriserna

a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Bestäm om matriserna i uppgift 2 är diagonaliserbara. Om någon matris M är det så hitta en matris C sådan att $C^{-1}MC$ är en diagonal matris samt bestäm $D = C^{-1}MC$.

4. Bestäm vilka av nedanstående matriser är ON-diagonaliserbara. För var och en sådan matris A hitta en matris C sådan att $C^T AC$ är en diagonal matris samt bestäm $C^{-1}AC$

a) $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5. a) Matrisen A är symmetrisk och har egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Hitta en bas av egenvektorer till A.

b) Matrisen A är symmetrisk och har egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Hitta en bas av egenvektorer till A.

6. Skriv på huvudaxelform och bestäm vilken typ av kurva i R^2 som ges av ekvationerna
a) $2x^2 - 6xy + 9y^2 = 1$ b) $x^2 - 6xy + 8y^2 = 1$

7. Transformera ekvationen $2x^2 + 12xy + 18y^2 + 40\sqrt{10}y = 100$ till huvudaxelform. Vad motsvarar ekvationena geometriskt?

Ledtrådar

1. Finns det vektorer som bibehåller sin riktning vid just den vridningen?

2. Bilda en matris $A-\lambda E$ med λ som den obekanta. Egenvärden är rötterna till ekvationen $\det(A-\lambda E)=0$. Egenvektorer är lösningarna till det homogena linjära systemet med matrisen $A-\lambda E$, där man har bytt λ mot ett motsvarande egenvärde.

3. M är diagonaliserbar om det finns en bas av egenvektorer. Då står egenvärden längs huvuddiagonalen i D och egenvektorer som kolonner i C.

4. Endast symmetriska matriser är ON-diagonaliserbara. Bestäm en bas av egenvektorer som är ortogonala mot varandra. Normera dessa vektorer. Använd de som i 3 för att bilda C.

5. En basvektor som saknas är ortogonal mot a) den given b) de givna och kan bestämmas genom kryssprodukten.

6. Skriv motsvarande symmetrisk matris till andragradsform och bestäm matrisens egenvärden.

7. Skriv motsvarande symmetrisk matris till andragradsform, bestäm matrisens diagonalform och motsvarande trasformationsmatris C. Uttryck gamla koordinater i de nya och bestäm uttryck för 1:agradsform i de nya koordinater. Bestäm sedan axlarnas position genom kvadratkomplettering.

Facit

1. a) Inga b) Alla vektorer är egenvektorer med egenvärdet –1 c) $\bar{e}_y$ med egenvärdet 1.

2. a) $\lambda_1 = 2 \leftrightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 3 \leftrightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) Inga c) $\lambda_1 = 2 \leftrightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 3 \leftrightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. a) Ja. T.e- $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) Nej. c) Nej.

4. a) Nej.

b) Ja, t.ex. $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

c)Nej

d) Ja, t.ex. $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5. a) T.ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ej normerad bas)

b) T.ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (ej normerad bas)

6. a) Den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 - 11\lambda + 9 = 0$ har 2 positiva rötter $\lambda_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{85}}{2}$, således detta är en ellips med ekvationen $\frac{11+\sqrt{85}}{2}X^2 + \frac{11-\sqrt{85}}{2}Y^2 = 1$ på huvudaxelsform.

b) Den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 - 9\lambda - 1 = 0$ har 2 rötter av olika tecken $\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{85}}{2}$, således detta är en hyperbel med ekvationen $\frac{9+\sqrt{85}}{2}X^2 - \frac{\sqrt{85}-9}{2}Y^2 = 1$ på huvudaxelsform.

7. **Svar.** En parabel $u = -0{,}5v^2$ där $u = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x - y) - 7, v = \frac{1}{\sqrt{10}}(x + 3y) - 3$

Skiss till lösning. Matrisen till andragradsformen är $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$. Den har egenvärden och egenvektorer $\lambda_1 = 0 \leftrightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ samt $\lambda_2 = 0 \leftrightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. På diagonalform fås andragradsformen $0 \cdot X^2 + 20Y^2$ samt sambandet mellan nya och gamla koordinater $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Kort sagt, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}(-X + 3Y)$, vilket ger i (X,Y)-koordinterna ekvationen $20Y^2 + 40X - 120Y = 100$ eller $2(X - 7) = -(Y - 3)^2$ – en parabel.