

Uppgifter till vecka 7

5B1133 Amelia 2 för T vt 2004

1. Bestäm tangenten och normalen till kurvan

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t + e^{t-1} \end{cases} \text{ i punkten } (3, 4)$$

2. Bestäm tangenten till kurvan $\begin{cases} x = t^5 \\ y = t^{10} + 1 \\ z = 2t^{15} - t^5 \end{cases}$ a) i punkten $t=1$ b) i punkten $t=0$

3. Bestäm tangenten till kurvan $r = \varphi^2$ i punkten $(r, \varphi) = (\pi^2, \pi)$

4. Beräkna längden av kurvan $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - t, 0 \leq t \leq 3 \\ y = t^2 \end{cases}$

5. Beräkna längden av kurvan $r = 4 \sin \varphi - 3 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ (polära koordinater)

6. Framställ skärningslinjen $\begin{cases} z = x^2 + 2x + \frac{y^2}{9} - y \\ y = 2x - z + 1 \end{cases}$ på parameterform.

7. Beräkna partiella derivator till funktionerna

a) $f(x, y) = \frac{x^2 \sin y}{2y}$ b) $g(x, y, z) = x\sqrt{y} \arctan(2z)$

8. Bestäm ekvationen till tangentplanet till ytan $z = \frac{x^2}{y}$ i punkten $(2, 1, 4)$

Ledtrådar

1. Punkten svarar mot $t_0=1$. Tangent: $\begin{cases} x = x(t_0) + \dot{x}(t_0)t \\ y = y(t_0) + \dot{y}(t_0)t \end{cases}$ Normal: $\begin{cases} x = x(t_0) - \dot{y}(t_0)t \\ y = y(t_0) + \dot{x}(t_0)t \end{cases}$

2. Tangent: $\begin{cases} x = x(t_0) + \dot{x}(t_0)t \\ y = y(t_0) + \dot{y}(t_0)t \\ z = z(t_0) + \dot{z}(t_0)t \end{cases}$ om $\begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Annars måste man försöka med en annan parameterframställning, här $s = t^5$

3. Framställ först en grafkurva $r = f(\varphi)$ på parameterform $\begin{cases} x = f(t)\cos t \\ y = f(t)\sin t \end{cases}$

4. Längden av en båge till en kurva på parameterform $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \leq t \leq b$ är $\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

5. Längden av en båge till en kurva på polärform $r = r(\varphi), a \leq \varphi \leq b$ är $\int_a^b \sqrt{\dot{r}^2 + r^2} d\varphi$

6. För x, y som är sammanbundna med ekvationen $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ rekommenderas

parametrisering $\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \cos t \\ y = y_0 + b \cdot \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Eliminera z , hitta en parametrisering för x och y , sedan uttryck även z i t .

8. Tangentplan till ytan $z = f(x, y)$ i punkten (x_0, y_0, z_0) har ekvation $z = z_0 + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

Facit

1. Tangent: $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 4t \end{cases}$ Normal: $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = -\pi^2 - 2\pi t \\ y = -\pi^2 t \end{cases}$

4. 12

5. 5π

6. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3 \sin t \\ z = 2 \cos t - 3 \sin t - 1 \end{cases}$

7. a) $f'_x = \frac{x \sin y}{y}$, $f'_y = \frac{x^2}{2} \frac{y \cos y - \sin y}{y^2}$ b) $g'_x = \sqrt{y} \arctan 2z$, $g'_y = \frac{x \arctan 2z}{2\sqrt{y}}$, $g'_z = \frac{2x\sqrt{y}}{1+4z^2}$

8. $z = 4x - 4y$