# Uppgifter till vecka 8

5B1133 Amelia 2 för T vt 2004

1. Bestäm tangentplanet till ytan $\dfrac{xy-4z^2}{xz-y^2}=-2$ i punkten $(3,2,1)$

2. Bestäm vinkeln mellan hyperboloiden $x^2+2y^2-3z^2=19$ och paraboloiden $z=(2x+y)^2$ i punkten $(2,-3,1)$.

3. Bestäm tangenten till skärningskurvan mellan ellipsoiden $x^2+2y^2+3z^2=20$ och planet $2x+4y-5z=9$ i punkten $(3,\ 2,1)$

4. Bestäm riktningsderivatan till funktionen $g(x,y,z)=x\sqrt{y}\,\arccos(2z)$ i punkten $(3,1,0)$ i riktningen av vektorn $\bar{v}=\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$

5. $g(x,y)=\sqrt{x+3y}-xy$ . Beräkna och förenkla så långt som möjligt $6\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-5\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

6. $g(u,v)=f\left(\dfrac{u}{v}\right)$ där $f$ är en deriverbar funktion. Bestäm $\dfrac{g'_u(-2,12)}{g'_v(-2,12)}$

7. Det är känt att funktionen $F(x,y,z)$ är differentierbar samt att $\mathrm{grad}F(0,2,3)=(3,4,3)$.
$g(t)=F\left(\ln(3t-5),\sqrt{t+2},3+\arctan(2-t)\right)$. Bestäm $g'(2)$.

8. $g(t)=|\bar{r}(t)|$ där $\bar{r}(t)$ är en differentierbar avbildning med $\bar{r}(1)=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},\bar{r}'(1)=\begin{pmatrix}6\\-2\\-3\end{pmatrix}$. Bestäm $g'(1)$.

## Ledtrådar

1. Tangentplanet till nivåytan: $F(x, y, z) = C$ i punkten $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ har ekvationen :
$P(x - x_0) + Q(y - y_0) + R(z - z_0) = 0$ där $P = F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0),\ Q = F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0),\ R = F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)$

(Obs! Det måste gälla att $F(x_0,\ y_0,\ z_0) = C$ samt $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \neq \bar{0}$ )

2. Beräkna gradienterna i den givna punkten, de är normalvektorer till ytorna. Vinkeln mellan ytorna är vinkeln mellan vektorerna. Cosinus till vilken $\varphi$ mellan vektorerna kan beräknas genom skalärprodukten: $\cos\varphi = \dfrac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|}$

3. Beräkna gradienterna i den givna punkten, de är normalvektorer till ytorna. Riktningsvektor till tangenten kan fås som kryssprodukten av de två vektorerna.

4. Riktningsderivatan $g'_{\bar{v}}(x_0,\ y_0,\ z_0) = \dfrac{grad\ g(x_0,\ y_0,\ z_0) \cdot \bar{v}}{|\bar{v}|}$

5. Skriv om $\sqrt{x + 3y} = (x + 3y)^{0,5}$ och använd $\left(u^a\right)' = au^{a-1}u'$

6. $g'_u = f'\left(\dfrac{u}{v}\right) \cdot \left(\dfrac{u}{v}\right)'_u, \quad g'_v = f'\left(\dfrac{u}{v}\right) \cdot \left(\dfrac{u}{v}\right)'_v$

7. Enligt kedjeregeln $g'(t) = F'_x \cdot \dot{x} + F'_y \cdot \dot{y} + F'_z \cdot \dot{z}$. Här har vi
$(F'_x, F'_y, F'_z) = (3,4,3),\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(3t - 5) \\ \sqrt{t + 2} \\ 3 + \arctan(2 - t) \end{pmatrix}$

8. $g(t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \dot{g} = \dfrac{2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z}}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

# Facit

1. $-4x+5y+2z=0$

2. $\pi-\arccos\dfrac{1}{7\sqrt{21}}$

3. $\begin{cases} x=3-32t \\ y=2+21t \\ z=1+4t \end{cases}$

4. $0{,}3\pi$

5. 5

6. 6

7. 7

8. $\dfrac{4}{3}$