Uppgifter till vecka 9a

5B1133 Amelia 2 för T vt 2004

1. Bestäm kurvans $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ekvation i polära koordinater.

I uppgifterna 2,3,4 gäller $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$.

Vi förutsätter att funktionen *f* har kontinuerliga derivator av 1:a och 2:a ordningen.

2. Uttryck funktionen $x^3 + y^3$ i (u, v) - koordinater

3. Uttryck $u\dot{u} - \dot{v}$ i $x, \dot{x}, y, \dot{y}$

4. $g(x, y)$ och $f(u,v)$ är uttrycken för en och samma funktion i olika koordinatsystem (dvs $g(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$).

a) Verifiera att $xg'_x + yg'_y = uf'_u + 2vf'_v$

b) Uttryck f'_u, f'_v i x, y, g'_x, g'_y

5. Beräkna och förenkla så långt som möjligt $6\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

a) Om $g(x, y) = f(x + 3y) - xy$

b) Om $g(x, y) = \tan(x + 3y)\ln(x + 3y) - xy$

6. Bestäm z''_{xy} då $z = f(u,v)$, $u = x + 2y, v = x - y$. Svaret får inte innehålla variabler *x* och *y*.

Ledtrådar

1. Sätt in : $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ och förenkla så långt som möjligt.

2. Utveckla $(x+y)^3$ och dela upp i faktorer summan av två blandade termer.
3. Derivera sambanden m.a.p. t och sätt in uttrycken för $u, \dot{u}, \dot{v}$

4. a) Enligt kedjeregeln $g'_x = f'_u + yf'_v,\ g'_y = f'_u + xf'_v$. (*)
Sätt dessa uttryck in i vänster led samt uttryck för u och v i höger led, sedan jämför resultaten.
b) Lös ut f'_u, f'_v ur sambanden (*).

5. a) Vid derivering m.a.p. x av $f(x+3y)$ ska resultatet multipliceras med inre derivatan 1, vid derivering m.a.p. y – med 3. Således
$g'_x = f' - y, g'_y = 3f' - x, g''_{xx} = f'', g''_{xy} = 3f'' - 1, g''_{yy} = 9f''$
b) $\tan(x+3y)\ln(x+3y)$ är bara ett enstaka fall av $f(x+3y)$

6. Enligt kedjeregeln gäller $g'_x = g'_u + g'_v,\ g'_y = 2g'_u - g'_v$ (*) för ***vilken som helst funktion*** g.
Så först skriver vi $z'_x = z'_u + z'_v$, sen deriverar båda led m.a.p. y, och eliminerar sedan ”konstiga” derivator z''_{uy} och z''_{vy} genom att använda sambanden (*) för funktionerna z'_u och z'_v

Facit

1. $r = 2\cos\varphi$
2. $u^3 - 3uv$
3. $x\dot{x} + y\dot{y}$
4. $f_u' = \dfrac{xg_x' - yg_y'}{x-y}, \; f_v' = \dfrac{g_y' - g_x'}{x-y}$
5. a) 5 b) 5
6. $2f_{uu}'' + f_{uv}'' - f_{vv}''$