Uppgifter till vecka 9b

5B1133 Amelia 2 för T vt 2004

1. $\overline{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} xyz^2 \\ xy^2+yz^2+zx^2 \end{pmatrix}$. Bestäm $\dfrac{\partial\overline{F}}{\partial y}$ och $\dfrac{\partial\overline{F}}{\partial(x,z)}$

2. Visa att ekvationen $8\sqrt{x+2y}-y\ln(3-x)=32$ definierar i en omgivning av punkten (2,7) precis en deriverbar funktion $y=y(x)$ sådan att $y(2)=7$ och bestäm $y'(2)$.

3. Visa att ekvationen $3(x+2z)-y(z-3)=25$ definierar i en omgivning av punkten (1,2,4) precis en differentierbar funktion $z=z(x,y)$ sådan att $z(1,2)=4$ och bestäm $\operatorname{grad} z(1,2)$.

4. Visa att ekvationssystemet $\begin{cases} x^2y+y^2z+z^2x=-1 \\ xy^2+yz^2+zx^2=5 \end{cases}$ definierar i en omgivning av punkten (–1,1,2) precis en differentierbar funktion $\overline{r}(x)=\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$ sådan att $\overline{r}(-1)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och bestäm $\overline{r}'(-1)$

5. Bestäm Taylorpolynomet av andragraden till funktionen $f(x,y)=2\sin(3x-2y-1)+e^{3y-4x}$ kring punkten (3,4).

6. Bestäm Taylorpolynomet av andragraden till funktionen $f(x,y)=2\ln(3x-y)-\cos(xy-2)$ kring punkten (1,2). Använd detta polynom för att beräkna ett approximativt värde av $f(1.1,1.9)$.

Ledtrådar

1. Om $\overline{F}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ så $\frac{\partial\overline{F}}{\partial y}=\begin{pmatrix}u'_y\\v'_y\end{pmatrix}$ och $\frac{\partial\overline{F}}{\partial(x,z)}=\begin{pmatrix}u'_x & u'_z\\v'_x & v'_z\end{pmatrix}$

2. Ekvationen $F(x,y)=C$ definierar i en omgivning av punkten (x_0,y_0) precis en deriverbar funktion $y=y(x)$ sådan att $y(x_0)=y_0$ omm $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Då $y'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$.

3. Ekvationen $F(x,y,z)=C$ definierar i en omgivning av punkten (x_0,y_0,z_0) precis en differentierbar funktion $z=z(x,y)$ sådan att $z(x_0,y_0)=z_0$ omm $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Då

$$grad\, z=-\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}\right)=-\frac{1}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}\cdot\left(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0)\right).$$

4. Ekvationssystemet $\overline{F}(x,y,z)=\overline{0}$ (där $\overline{F}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$) definierar i en omgivning av punkten $P(x_0,y_0,z_0)$ precis en differentierbar funktion $\overline{r}(x)=\begin{pmatrix}y(x)\\z(x)\end{pmatrix}$ sådan att $\overline{r}(x_0)=\begin{pmatrix}y_0\\z_0\end{pmatrix}$ omm $\det\frac{\partial\overline{F}}{\partial(y,z)}\neq 0$. Då $\frac{d\overline{r}}{dx}(P)=-\left(\frac{\partial\overline{F}}{\partial(y,z)}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\overline{F}}{\partial x}\right)$.

5,6. Taylorpolynomet av andragraden till funktionen $f(x,y)$ kring punkten $P(a,b)$ är

$$f(P)+f'_x(P)(x-a)+f'_y(P)(y-b)+\frac{1}{2}f''_{xx}(P)(x-a)^2+\frac{1}{2}f''_{yy}(P)(y-b)^2+f''_{xy}(P)(x-a)(y-b)$$

6. Sätt in $x=1.1, y=1.9, a=1, b=2$ i Taylorpolynomet av andragraden till den givna funktionen.

Facit

1. $\dfrac{\partial \overline{F}}{\partial y}=\begin{pmatrix} xz^2 \\ 2xy+z^2 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial \overline{F}}{\partial (x,z)}=\begin{pmatrix} yz^2 & 2xyz \\ y^2+2xz & 2yz+x^2 \end{pmatrix}$

2. $y(x)$ finns p.g.a. $F_y'(2,7)=8\neq 0$. $y'(2)=-4$

3. $z(x,y)$ finns p.g.a. $F_z'(1,2,4)=4\neq 0$. $\text{grad}\, z(1,2)=\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

4. $\bar{r}(x)$ finns p.g.a. $\det\dfrac{\partial \overline{F}}{\partial (y,z)}(-1,1,2)=31\neq 0$. $\bar{r}'(-1)=\begin{pmatrix} -1/31 \\ 19/31 \end{pmatrix}$

5. $1+2(x-3)-(y-4)+8(x-3)^2-12(x-3)(y-4)+\dfrac{9}{2}(y-4)^2$

6. $4+6(x-1)-2(y-2)-17(x-1)^2-2(x-1)(y-2)-3(y-2)^2$

$f(1.1,1.9)\approx 4.62$