# Uppgifter till vecka 10

5B1133 Amelia 2 för T vt 2004

1. Visa att ekvationen $3(x+2z)-ye^{z-3}=14$ definierar i en omgivning av punkten (1,7,3) precis en differentierbar funktion $z=z(x,y)$ sådan att $z(1,7)=3$ och bestäm Taylorpolynomet av ordning 2 till funktionen $z(x,y)$ kring punkten (1,7)

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen
$f(x,y)=6xy-x^3-y^3$

3. En funktionen $f(x,y)$ är definierad på en öppen rektangel $-0.5<x<4,\quad 1<y<3$ genom formeln $f(x,y)=x^3-3x+y^3-12y$ . Bestäm eventuella lokala extrempunkter (och deras karaktär) till funktionen.

4. Är det sant att $5x^2+4y^2+3\cos(xy)\geq 3$ om punkten $(x,\ y)$ ligger tillräcklig nära origo?

5. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x,y)=x^2-2x+2y^2$

a) på rektangeln $-2\leq x\leq 2,\quad 0\leq y\leq 3$

b) på cirkelskivan $x^2+y^2\leq 4$

## Ledtrådar

1. Ekvationen $F(x,y,z)=C$ definierar i en omgivning av punkten $\mathrm{M}(x_0, y_0, z_0)$ precis en differentierbar funktion $z=z(x,y)$ sådan att $z(x_0, y_0)=z_0$ omm $F_z'(M)\neq 0$. Då gäller $z_x' = -\frac{F_x'}{F_z'}, z_y' = -\frac{F_y'}{F_z'}$ (*). För att få fram andraderivatorna $z_{xx}'', z_{xy}'', z_{yy}''$ ska du derivera sambanden (*) m.a.p *x* och *y*. Obs: uttrycken i högra led beror även av *z*. Glöm inte att multiplicera med inre derivator $z_x', z_y'$ vid derivering av dessa uttryck.

2. Bestäm punkter där grad*f* =0 (kritiska punkter). Beräkna Hessens matris $\begin{pmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{xy}'' & f_{yy}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ i var och en av dessa punkter. Om $AC-B^2>0, A>0$ är det ett lokalt minimum. Om $AC-B^2>0, A<0$ är det ett lokalt maximum. Om $AC-B^2<0$ är det en sadel, inte ngn extrempunkt. Om $AC-B^2=0$ – en obestämd karaktär (det går inte att bestämma med hjälp av bara Hesses matris).

3. Makulera alla kritiska punkter som inte tillhör definitionsmängden.

4. Visa att funktionen i vänstra ledet har ett lokalt minimum i origo.

5. Globala maximi- och minimipunkter ligger antingen i en kritisk punkt inom definitionsområdet eller på en kant. Skriv om funktionen som envariabelfunktion på varje kant och undersök dessa funktioner.

# Facit

1. $z(x,y)$ finns p.g.a. $F'_z(M) = -1 \neq 0$.
$p_2(x,y) = 3 + 3(x-1) - (y-7) - 31.5(x-1)^2 + 18(x-1)(y-7) - 2.5(y-7)^2$

2. Lokalt maximum i (0,0) (sadel i (2,2))

3. Lokalt minimum i (1,2)

4. Ja

5. a) $f_{\max} = f(-2,3) = 26$, $f_{\min} = f(1,0) = -1$
b) $f_{\max} = f(-2,0) = 8$, $f_{\min} = f(1,0) = -1$