Uppgifter till vecka 13

5B1133 Amelia 2 för T vt 2004

1. Beräkna följande dubbelintegraler

a. $\iint_D \left(x^2+y^2\right)^2 dxdy$ då $\boldsymbol{D}$ ges av $1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

b. $\iint_D \cos(y-2x)dxdy$ då $\boldsymbol{D}$ ges av $0 \le x+y \le 3\pi,\ 2x \le y \le 2x+\dfrac{\pi}{2}$

c. $\iint_D (3y+1)dxdy$ över ellipsskivan $9x^2+\dfrac{y^2}{36} \le 1$

2. Beräkna (eller visa divirgens) följande generaliserade dubbelintegraler

a. $\iint_D \dfrac{1}{y}dxdy$ då $\boldsymbol{D}$ ges av $0 \le xy \le 18, y \ge 3$

b. $\iint_D \dfrac{1}{(x+1)y^2}dxdy$ då $\boldsymbol{D}$ ges av $0 \le y \le 1,\ \ 0 \le x \le 2$

c. $\iint_D \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ då $\boldsymbol{D}$ ges av $x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

3. Beräkna följande dubbelintegraler

a. $\iint_D \ln(x+y)dxdy$ då $\boldsymbol{D}$ är rektangeln med hörnen $(1,0),(0,1),(4,3),(3,4)$.

b. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ över cirkelskivan $x^2+(y-2)^2 \le 4$

Facit

1. a. $\frac{21\pi}{4}$ b. π c. 2π

2. a. 6 b. Divergent c. π

3. a. $7\ln 7 - 6$ b. $^{256}/_{9}$

Ledtrådar

1a. Efter den polära substitutionen $\iint \; = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_1^2 r^4 r dr$

1b. Efter linjära substitutionen $\begin{cases} u = x + y \\ v = y - 2x \end{cases}$, vilken medför $dudv = 3dxdy$ fås $\iint \; = \int_0^{3\pi} du \int_0^{\pi/2} \cos v \frac{dv}{3}$

1c. Efter elliptiska substitutionen $\begin{cases} x = \frac{1}{3} r \cos\varphi \\ y = 6r \sin\varphi \end{cases}$, vilken

medför $dxdy = 2rdrd\varphi$ fås $\iint \; = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (18r\sin\varphi + 1) 2rdr$

2a. $\iint = \int_3^{\infty} dy \int_0^{18/y} \frac{dx}{y}$

2b. $\iint \; = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{dy}{y^2} \int_0^2 \frac{dx}{x+1} = \lim_{a \to 0} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \ln 3 = \infty$

2c. Efter den polära substitutionen $\iint \; = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \frac{1}{r} rdr$

3a. Efter linjära substitutionen $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$, vilken medför $dudv = 2dxdy$ fås $\iint \; = \int_{-1}^{1} dv \int_1^7 \ln u \frac{du}{2}$

3b. Efter den polära substitutionen $\iint \; = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} r^2 dr$. Använd sedan formeln

$$\sin^3\varphi = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}$$