

Uppgifter till vecka 14, del 1

5B1133 Amelia 2 för T vt 2004

1. Beräkna följande trippelintegraler

a. $\iiint_K (z^2 - x^2 - y^2) dx dy dz$ då K ges av $-1 \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$

b. $\iiint_K xyz dx dy dz$ då K ges av $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x \leq 2$, $y - x \leq z \leq 0$

c. $\iiint_K y dx dy dz$ då K ges av $y \geq 0$, $z \geq 0$, $y + z \leq 2$, $x + y + 2z \leq 3$

d. $\iiint_K (x^2 + y^2) z dx dy dz$ då K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$

e. $\iiint_K z dx dy dz$ då K ges av $3x^2 + 3y^2 \leq z^2 \leq 4 - x^2 - y^2$, $y \geq 0$, $z \geq 0$

Facit

1. a. 16 b. $-\frac{35}{72}$ c. $\frac{4}{3}$ d. $\frac{16\pi}{3}$ e. π

Ledtrådar

$$1a. \text{ Till exempel } \iiint = \int_0^2 dx \int_0^3 dz \int_{-1}^1 (z^2 - x^2 - y^2) dy$$

$$1b. \iiint = \int_0^1 dy \int_y^2 dx \int_{y-x}^0 xyz dz$$

$$1c. \iiint = \int_0^2 dy \int_0^{2-y} dz \int_0^{3-y-2z} y dx$$

$$1d. \iiint = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} dx dy \int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} (x^2+y^2) z dz = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2+y^2)(4-(x^2+y^2)) dx dy$$

Använd sedan den polära substitutionen.

1e. I sfäriska koordinater ges K ges av $0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, 0 \leq \varphi \leq \pi$, och eftersom

$$z = \rho \cos \theta, dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \text{ får vi att } \iiint = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\pi/6} d\theta \int_0^2 \rho \cos \theta \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho$$