Uppgifter till vecka 14, del 2

5B1133 Amelia 2 för T vt 2004

1. Planet $z = 3$ delar klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ i två delar. Beräkna volymen av den minsta av delarna.

2. Beräkna volymen av den oändliga kroppen som ges av olikheterna $x|y| \leq 1,\ x|z| \leq 2,\ x \geq 3$

3. Beräkna tyngdpunkten av kroppen som begränsas av koordinatplanen samt planen $x = 4,\ y + z = 3$

4. Beräkna den totala arean av sidoytorna på tetraedern som begränsas av koordinatplanen och planet $3x - 2y + 4z = 12$.

5. Beräkna arean av ytstycket $z = 3x^2 + 3y^2$ där $z \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$

6. Beräkna arean av den delen av cylindern $x^2 + y^2 = 16$ som ligger innanför cylindern $x^2 + z^2 = 16$

Facit

1. 45π **2**. $\frac{8}{3}$ **3**. $(2, 1, 1)$ **4**. $27+3\sqrt{29}$ **5**. $\pi\frac{145\sqrt{145}-1}{216}$ **6**. 128

Ledtrådar

1. Snittet på nivå z är cirkeln med radien $\sqrt{36-z^2}$ och har således arean $\pi\left(36-z^2\right)$. Då $V=\int_3^6 \pi\left(36-z^2\right)dz$.

2. Skär kroppen i skikt parallella med *yz*-planet. Snittet på nivå x är rektangeln $-\frac{1}{x}\le y\le\frac{1}{x}, -\frac{2}{x}\le z\le\frac{2}{x}$ och har således arean $\frac{8}{x^2}$. Så är $V=\int_3^\infty \frac{8}{x^2}dx$.

3. Kroppen kan ges av olikheterna $0\le x\le 4, 0\le y\le 3$ (integrationsområdet!) och $0\le z\le 3-y$. Så är $V=\int_0^4 dx\int_0^3 dy\int_0^{3-y}dz$, $x_C=\frac{1}{V}\int_0^4 dx\int_0^3 dy\int_0^{3-y}xdz$, $y_C=\frac{1}{V}\int_0^4 dx\int_0^3 dy\int_0^{3-y}ydz$, $z_C=\frac{1}{V}\int_0^4 dx\int_0^3 dy\int_0^{3-y}zdz$

4. Planet $3x-2y+4z=12$ skär axlarna *x,y,z* i punkterna $A(4,0,0), B(0,-6,0)$ resp. $C(0,0,3)$. Tre av sidoytorna är rätvinkliga trianglar med kateterna av längder 4, 6 och 3. Så är areorna av trianglarna *AOB, AOC, BOC* lika med 12, 6 resp. 9. Normalen (3,–2,4) till sidoytan *ABC* bildar vinkeln φ med *z*-axel där $\cos\varphi=\frac{4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}$. Då har *ABC* arean $\frac{|AOB|}{\cos\varphi}=3\sqrt{29}$

5. Projektionen av skärningslinjen mellan ytan $z=3x^2+3y^2$ och planet $z=12$ är kurvan $12=3x^2+3y^2$, dvs är cirkeln $x^2+y^2=4$, vilket ger integrationsområdet. Integranden $\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\sqrt{1+36\left(x^2+y^2\right)}$. Arean $=\iint_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{1+36\left(x^2+y^2\right)}dxdy$ vilken kan lätt beräknas genom polär substitution.

6. $z=\pm\sqrt{16-x^2}$ och både övre och undre delarna ger lika stora insatser. Integranden

$$\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2+0^2}=\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$\text{Arean }=2\iint_{x^2+y^2\le 16}\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}dxdy=8\int_{\substack{x^2+y^2\le 16\\ x\ge 0,\, y\ge 0}}\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}dxdy=8\int_0^4 dx\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}dy$$