Uppgifter till vecka 19, del 1 och 2

5B1133 Amelia 2 för T vt 2004

1. Beräkna linjeintegralen $\int \cos\frac{2y}{x}dx + \sin\left(2x^2 - 2y\right)dy$ längs grafkurvan $y = x^2$ från punkten $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi^2}{144}\right)$ till punkten $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi^2}{16}\right)$

2 Beräkna linjeintegralen $\int_{AB} (x + y)dx + x^2 dy$ längs sträckan med randpunkterna $A(3,1)$, $B(6,2)$.

3. Beräkna linjeintegralen $\oint_{ABCA} \left(e^x + y\right)dx + \left(3x - \sqrt{y}\right)dy$ längs den slutna brutna linjen *ABCA* med hörnen $A(2,1)$, $B(4,2)$, $C(2,4)$.

4. **a**. Kontrollera att fältet $\overline{F} = \left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{y}, \quad -\frac{x^2}{y^2}\right)$ är konservativt.

b. Bestäm potentialfunktionen g till $\overline{F}$ i den 1:a kvadranten ($x>0$, $y>0$) sådan att $g(1,1) = 2$.

5. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n} dS$ över den delen av ytan $z = x^2 - xy$ som ligger inom $0 \le x \le 1, x \le y \le 1$. Normalen är riktad uppåt, $\overline{F} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 1 - xy \end{pmatrix}$.

6. Beräkna flödesintegralen $\iint_S \overline{F} \cdot \hat{n} dS$ över den delen av ytan $z = x^2 + y^2$ som ligger under planet $z = 1$. Normalen är riktad uppåt, $\overline{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix}$.

Facit

1. $\frac{1}{4}$

2. 39

3. 3

4. $2\ln x + \frac{x^2}{y} + 1$

5. $\frac{1}{2}$

6. 0

Ledtrådar

1. $\int = \int_{\pi/12}^{\pi/4} \cos\frac{2x^2}{x} dx + \sin\left(2x^2 - 2x^2\right) d\left(x^2\right) = \int_{\pi/12}^{\pi/4} \cos 2x dx$

2. Sätt in $x = 3y$ där y går från 1 till 2.

3. Greens sats $\oint_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dxdy$ ger här att $\oint = \iint_{\Delta ABC} 2dxdy = 2\left|\Delta ABC\right|$ (observera att linjen genomlöps i positiv led).

4a. Kontrollera att $\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{y} \right)'_y = \left(-\frac{x^2}{y^2} \right)'_x$

4b. Hitta potentialen på formen $g(x, y) + C$ och bestäm det lämpliga värdet på konstanten C.

5. $\int = \iint_T (y - 2x, x, 1)(x, 2x, 1 - xy) dxdy = \iint_T 1 dxdy = |T|$, där T är triangeln med katetrna 1 och 1.

6. $\int = \iint_{x^2+y^2\le 1} (x, y, 2z)(-2x, -2y, 1) dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(-2x^2 - 2y^2 + 2z\right) dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1} 0 dxdy = 0$