Uppgifter till vecka 20

5B1133 Amelia 2 för T vt 2004

1. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F} = \left(x^3 + y^3, \quad z^3, 3xyz\right)$. Ange vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem:

a. grad $\boldsymbol{F}$	**d**. grad div rot $\boldsymbol{F}$	**f**. div grad div $\boldsymbol{F}$
b. div $\boldsymbol{F}$	**e**. grad rot div $\boldsymbol{F}$	**g**. rot div grad $\boldsymbol{F}$
c. rot $\boldsymbol{F}$	**f**. div grad rot $\boldsymbol{F}$	**h**. rot rot rot $\boldsymbol{F}$

2. Vektorfältet $\boldsymbol{F} = \dfrac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$. Beräkna **a**. div $\boldsymbol{F}$ **b**. rot $\boldsymbol{F}$

3. Givna vektorfältet $\boldsymbol{F} = \left(y, 2z, 3x\right)$ och punkterna $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,4)$. Beräkna linjeintegralen $\oint\limits_{ABCA} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ a) direkt. b) genom Stokes' sats.

4. a) Bestäm konstanten a så att vektorfältet $\boldsymbol{F} = \left(2x\sin y - 2z^2, x^2\cos y + z^3, ayz^2 - 4xz\right)$ är konservativt.

b) Bestäm i detta fall potentialen till F som är 0 i punkten $A(1, 0, 1)$.

c) Beräkna i detta fall linjeintegralen $\int\limits_{AB} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ där AB är sträckan, $B(0, \pi, 2)$.

Facit

1.

a. –	**d**. $\overline{0}$	**f**. 6
b. $3x^2+3xy$	**e**. –	**g**. –
c. $\left(3xz-3z^2,-3yz,-3y^2\right)$	**f**. –	**h**. $(6,0,6)$

2. a. 0 i alla punkter utom origo. **b**. $\overline{0}$ i alla punkter utom origo.

3. –15

4. a. 3 **b**. $x^2\sin y+yz^3-2xz^2+2$ **c**. $4\pi+2$

Ledtrådar

1. grad(*function*)=*vektorfält*
div(*vektorfält*)= *function*
rot(*vektorfält*)=*vektorfält*

2. $\bar{r} = (x, y, z), \quad r = |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Observera att t.e. $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial f(r)}{\partial y} = \frac{y}{r} f'(r)$. Således är det lättare att beräkna om man skriver om ***F*** som $\left(x \cdot \frac{1}{r^3}, y \cdot \frac{1}{r^3}, z \cdot \frac{1}{r^3} \right)$

3. a. $\oint\limits_{ABCA} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \oint\limits_{ABCA} ydx + 2zdy + 3xdz = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} = -1 - 8 - 6$

b. $\oint\limits_{ABCA} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \iint\limits_{\Delta ABC} rot\bar{F} \cdot \hat{n} dS = \iint\limits_{\Delta OAB} (-2, -3, -1) \cdot (4, 2, 1) dxdy$

4a. a fås av villkoret $\left(x^2 \cos y + z^3\right)'_z = \left(ayz^2 - 4xz\right)'_y$

4b. $U'_x = 2x \sin y - 2z^2 \Rightarrow U = x^2 \sin y - 2xz^2 + f(y, z)$

$U'_y = x^2 \cos y + z^3 \Rightarrow U = x^2 \sin y - 2xz^2 + yz^3 + g(z)$

$U'_z = 3yz^2 - 4xz \Rightarrow U = x^2 \sin y - 2xz^2 + yz^3 + C$

$U(1,0,1) = 0 \Rightarrow C = 2$

4c. Då fältet är konservativt beror integralen endast på start och slutpunkterna $\int = \int\limits_A^B = U(B) - U(A)$