Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004–05–19, kl. 8.00–13.00.

5B1119, Vektoranalys.

Uppgifterna 4–5 svarar mot varsitt moment i den kontinuerliga examinationen. Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moment man inte blivit godkänd på under kursens gång. Bedömning här är Godkänd/Underkänd.

Uppgifterna 6–10 poängsätts med maximalt 4 poäng per uppgift. Betygsgränser:
För betyg 3 krävs godkänt på moment 4–5 plus 3 poäng totalt på uppgifterna 6–10.
För betyg 4 krävs godkänt på moment 4–5 plus 7 poäng totalt på uppgifterna 6–10.
För betyg 5 krävs godkänt på moment 4–5 plus 12 poäng totalt på uppgifterna 6–10.

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförliga lösningar och motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv program och grupp tydligt på omslaget.

---

4. Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\Gamma} (x^2 + xy)\, dx + (x + 2y)\, dy$$

där Γ är räta linjen $x + y = 1$ från punkten $(1,0)$ till punkten $(0,1)$.

5. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\mathbf{S}} (x + 3, y + 2, z + 1) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$

där $\mathbf{S}$ är den del av planet $z = 4 - x - 2y$ som projiceras på triangeln med hörnen i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$. Enhetsnormalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ har positiv z–komponent.

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_{\mathbf{D}} x\, dxdy$, där $\mathbf{D}$ är det ändliga område som begränsas av kurvan $xy = 2$ och linjen $x + y = 3$.

7. Antag att vektorfältet $\boldsymbol{F}$ och funktionen f har kontinuerliga partiella derivator.
   a. Visa att $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$.
   b. Är det möjligt att $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = (x,y,z)$?

8. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F} = (y^2 + az, bxy, 3z^2 - x)$, där a och b är konstanter.
   a. Bestäm a och b så att fältet $\boldsymbol{F}$ blir konservativt.
   b. Bestäm för dessa värden på a och b en potential till $\boldsymbol{F}$.
   c. Bestäm för dessa värden på a och b det arbete fältet uträttar längs kurvan

   $$\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, \sin t + \cos t, \sin t)$$

   från punkten $(2,1,0)$ till punkten $(0,1,1)$.

9. Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F} = (xz^2, x^2z, xy^2)$ ut ur kroppen $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$.

10. Hur stor maximalt kan den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{x - y}{(1 + x + y)^4}\, dxdy$$

vara om $\mathbf{D}$ är ett obegränsat område i första kvadranten?

Lycka Till!

Lösningsförslag kommer finnas på adressen
http://www.math.kth.se/math/student/courses/5B1133/M/200304/tentaopen040519.pdf

4. Vi parametriserar Γ: $x = t$, $y = 1 - t$, $dx = dt$, $dy = -dt$, t går från 1 till 0. Detta ger

$$\int_\Gamma (x^2 + xy)\,dx + (x + 2y)\,dy = \int_1^0 (t^2 + t - t^2 - t - 2 + 2t)\,dt = \int_1^0 (2t - 2)\,dt = \Big[t^2 - 2t\Big]_1^0 = 1.$$

Svar: 1.

---

5. Låt **D** beteckna triangeln med hörnen i punkterna (0,0), (1,0) och (0,1). Vi har

$$\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)\,dxdy = \{\ \hat{\boldsymbol{n}} \text{ har positiv } z\text{–komponent}\ \} = (1,2,1)\,dxdy$$

och

$$\iint_{\mathbf{S}} (x + 3, y + 2, z + 1) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \iint_{\mathbf{D}} (x + 3, y + 2, z + 1) \cdot (1, 2, 1)\,dxdy =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} (x + 3, y + 2, 4 - x - 2y + 1) \cdot (1, 2, 1)\,dxdy = 12 \iint_{\mathbf{D}} dxdy = 12 \cdot \text{arean av } \mathbf{D} = 6.$$

Svar: 6.

---

6. Kurvan $xy = 2$ och linjen $x + y = 3$ skär varandra då

$$\begin{cases} xy = 2 & \Rightarrow x(3 - x) = 2 \ \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2 \\ x + y = 3 \ \Rightarrow y = 3 - x & \qquad\qquad \Rightarrow y_1 = 2,\ y_2 = 1 \end{cases}$$

alltså i punkterna (1,2) och (2,1). Området **D** ges då av $2/x \le y \le 3 - x$, $1 \le x \le 2$. Vi får

$$\iint_{\mathbf{D}} x\,dxdy = \int_1^2 dx \int_{2/x}^{3-x} x\,dy = \int_1^2 x\Big[y\Big]_{27x}^{3-x} dx = \int_1^2 x(3 - x - 2/x)\,dx =$$

$$= \int_1^2 (3x - x^2 - 2)\,dx = \Big[3x^2/2 - x^3/3 - 2x\Big]_1^2 = 1/6.$$

Svar: 1/6.

---

7. a. Låt $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$. Vi har

$$\text{rot}\,\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (P, Q, R) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$$

och

$$\text{div rot}\,\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) =$$

$$= R''_{yx} - Q''_{zx} + P''_{zy} - R''_{xy} + Q''_{xz} - P''_{yz} = 0.$$

b. Antag att f är en sådan funktion och låt $\boldsymbol{F} = \text{grad}\,f$. Då gäller att

$$\text{div rot}\,\boldsymbol{F} = \text{div}\,(x,y,z) = 3 \neq 0$$

vilket strider mot a. dvs är ej möjligt.

Svar: ej möjligt.

---

8. a. Ett nödvändigt krav för att $\boldsymbol{F}$ skall vara konservativt är att rot $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$. Eftersom $\boldsymbol{F}$ är kontinuerligt deriverbar i hela $\mathbf{R}^3$, som är enkelt sammanhängande, så är detta krav också tillräckligt. Vi har

$$\text{rot}\,\boldsymbol{F} = (0, a + 1, by - 2y) = (0,0,0) \iff a = -1 \text{ och } b = 2.$$

Svar a: $a = -1$ och $b = 2$.

b. Vi bestämmer nu en potentialfunktion U till $\boldsymbol{F} = (y^2 - z, 2xy, 3z^2 - x)$, dvs vi söker en funktion $U(x,y,z)$ sådan att grad $U = \boldsymbol{F}$.

$$\begin{cases} U'_x = y^2 - z & (1) \\ U'_y = 2xy & (2) \\ U'_z = 3z^2 - x & (3) \end{cases}$$

Ekvation (1) ger att $U = xy^2 - xz + g(y,z)$. Derivation med avseende på y ger $U'_y = 2xy + g'_y$. Jämförelse med (2) ger att $g'_y(y,z) = 0$, och således är $U = xy^2 - xz + h(z)$. Detta ger att $U'_z = -x + h'$ och jämförelse med (3) ger att $h'(z) = 3z^3$. Således är $h(z) = z^3 + C$ och $U = xy^2 - xz + z^3$ är en potential.

Svar b: $U = xy^2 - xz + z^3$.

c. $\boldsymbol{F}$ är konservativt $\Rightarrow$ arbetet $\boldsymbol{F}$ uträttar är endast beroende av start– och slutpunkterna och är $= U(2,1,0) - U(0,1,1) = 1$.

Svar c: 1.

---

9. Kroppens rand består av sfären $\mathbf{S}_1$: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och sfären $\mathbf{S}_2$: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Vi har flödet ut ur kroppen = flödet ut ur $\mathbf{S}_2$ + flödet in i $\mathbf{S}_1$.

Enligt Gauss´sats är

$$\text{flödet ut ur } \mathbf{S}_2 = \iint_{\mathbf{S}_2} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \{\, \mathbf{K}_2: x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \,\} = \iiint_{\mathbf{K}_2} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dxdydz =$$

$$= \iiint_{\mathbf{K}_2} z^2\, dxdydz = \{\text{ sfäriska koordinater; } 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \,\} =$$

$$= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^2\cos^2\theta \cdot r^2 \sin\theta\, d\theta = \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2 \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{-\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{128\pi}{15}.$$

På samma sätt får vi att

$$\text{flödet in i } \mathbf{S}_1 = \iint_{\mathbf{S}_1} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \{\, \mathbf{K}_1: x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \,\} = -\iiint_{\mathbf{K}_1} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dxdydz = -\frac{4\pi}{15}$$

alltså flödet ut ur kroppen $= \dfrac{124\pi}{15}$.

Svar: $\dfrac{124\pi}{15}$.

---

10. Största värdet fås om integranden är icke–negativ i $\mathbf{D}$, dvs om $\mathbf{D}$ ges av $x - y \ge 0$ och $y \ge 0$ ($\mathbf{D}$ är en del av första kvadranten). Vi substituerar $u = x - y$, $v = 1 + x + y$. Området $\mathbf{D}$ övergår då på området $\mathbf{G}$: $u \ge 0$, $v - u \ge 1$. Man får $\det \dfrac{d(x,y)}{d(u,v)} = \dfrac{1}{2}$ och

$$\iint_{\mathbf{D}} \frac{x - y}{(1 + x + y)^4}\, dxdy = \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{G}} \frac{u}{v^4}\, dudv = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} dv \int_0^{v-1} \frac{u}{v^4}\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{v^4}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{v-1} dv = \frac{1}{4}\int_1^{\infty} \frac{v^2 - 2v + 1}{v^4}\, dv = \frac{1}{12}.$$

Svar: $\dfrac{1}{12}$.
