

5B1134 Matematik och modeller

2006-09-11

2 Andra veckan — Trigonometri

Veckans begrepp

- enhetscirkeln, trigonometriska ettan
- trigonometrisk funktion, sinuskurva
- period, fasförskjutning, vinkelhastighet
- trigonometrisk ekvation
- additionssatserna, formler för dubbla och halva vinkeln.

Frågor att besvara

- Hur definieras de trigonometriska funktionerna?
- Hur beräknas de trigonometriska funktionerna?
- Vilka grundläggande egenskaper har de och hur härleder man andra egenskaper från dem?
- Vad är en trigonometrisk ekvation och vilka typer av trigonometriska ekvationer kan vi lösa?

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 2.1

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan\left(3\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(4)

b) I en triangel är cosinus för två av vinklarna $1/4$, respektive $1/2$. Använd additionsformeln för cosinus för att bestämma cosinus av den tredje vinkeln. (3)

c) Om $\cos \alpha = 1/4$ och $\cos \beta = x$, vad är det då för villkor på x för att triangeln har två vinklar som är lika? (2)

Övning 2.2

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2},$$

där $\omega = 100\pi$. (4)

b) Skriv om $5 \sin \omega t - 12 \cos \omega t$ på formen $A \sin(\omega t + \phi)$. (3)

c) Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x) = a \sin x + b \cos x + c$$

där a , b och c är reella konstanter. (2)

Övning 2.3

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin 4x = \cos 5x.$$

(3)

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4)

c) Använd formeln för cosinus av dubbla vinkeln för att finna ett exakt uttryck för $\sin \pi/12$. (2)

Övning 2.4

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan 2x = \sqrt{3}.$$

(3)

- b) För att bestämma extremvärdena för funktionen $f(x) = \sin 2x \cos x$ leds man till att finna nollställena till derivatan $g(x) = f'(x) = 2 \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$. Förenkla uttrycket för $g(x)$ och bestäm alla lösningar till den trigonometriska ekvationen $g(x) = 0$. (4)

- c) Härled formeln

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}$$

med hjälp av någon av additionsformlerna. (2)

Övning 2.5

- a) Skriv om $\sin x - \sqrt{3} \cos x$ på formen $A \sin(x + \phi)$. (3)

- b) Använd resultatet från a) för att bestämma samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}. \quad (4)$$

- c) Härled, med hjälp av additionsformlerna och trigonometriska ettan, formeln för $\sin(x/2)$ uttryckt i $\cos x$. (2)

Övning 2.6

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen (4)

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- b) Använd additionsformlerna och trigonometriska ettan för att skriva om $\sin 3x$ som ett polynom i $\sin x$ och $\cos 3x$ som polynom i $\cos x$. (5)

Övning 2.7

- a) Rita upp grafen för funktionen $f(x) = 3,5 \cos(4,4x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi/3$ och bestäm alla lösningar till ekvationen

$$3,5 \cos(4,4x) = 1,2$$

i samma intervall. Ange lösningarna med två värdesiffror. (4)

- b) Hur många lösningar har ekvationen

$$\sin(\omega t + \phi) = 0,242$$

i intervallet $0 \text{ ms} \leq t \leq 94 \text{ ms}$, om $\omega = 3,14 \cdot 10^2$ radianer/s och $\phi = -2\pi/3$? (2)

- b) Man kan skriva om $a \sin(\omega t) + b \sin(\omega t + 2\pi/3)$ på formen $A \sin(\omega t + \phi)$. Bestäm amplituden A uttryckt i a och b . (3)

Övning 2.8

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin\left(\frac{2x - \pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3)$$

- b) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$1,2 \sin x + 1,4 \cos x = 0,54$$

med två gällande siffrors noggrannhet. (4)

- c) Använd sinussatsen för att härleda additionssatsen för sinus i det fall då alla inblandade vinklar ligger mellan 0° och 180° . (2)

Övning 2.9

- a) Bestäm samtliga nollställen till funktionen

$$f(x) = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1. \quad (3)$$

- b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x + \sin 2x = 0. \quad (3)$$

- c) Vilket är det minsta positiva tal, x , där det inte spelar någon roll om man har miniräknaren inställd på radianer eller grader när man skall beräkna $\sin x$? (3)

Övning 2.10

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin\left(5x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3)$$

- b) Bestäm ett närmevärde med två gällande siffror till den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$\sin x + 2 \cos x = \sqrt{2} \quad (4)$$

- c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0. \quad (2)$$

Övning 2.11

- a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(2t + \pi/5) = -\sqrt{3} \quad (4)$$

- b) Bestäm med två värdesiffrors noggrannhet konstanterna A och ϕ sådana att

$$A \sin(x + \phi) = 5 \sin x - 3 \cos x. \quad (3)$$

- c) Skriv $\cos 4x$ som ett polynom i $\cos x$. (2)

Övning 2.12

- a) Bestäm samtliga lösningar i intervallet $5\pi \leq t \leq 7\pi$ till ekvationen

$$\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ange svaret exakt i radianer. (3)

- b) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$5 \sin x + 8 \cos x = 0$$

med en noggrannhet på tre gällande siffror. (3)

- 2) Uttrycket $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ kan skrivas om på formen $A \sin(2x + \phi) + B$. Bestäm konstanterna A och B uttryckta i a , b och c . (3)

Övning 2.13

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(3x + \pi/4) = \sqrt{3}.$$

(3)

c) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$2,0 \sin x - 3,2 \cos x = 2,4.$$

Ange svaret som ett närmevärde med två decimalers noggrannhet.

(4)

c) Bestäm konstanterna a och b så att kurvan $y = a \cos x + b \sin x$ går genom punkterna $(x, y) = (0, 2)$ och $(x, y) = (\pi/3, -1)$.

(2)

Övning 2.14

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos(2x + \pi/3) = 0,62$$

i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Ange svaren med tre gällande siffrors noggrannhet.

(3)

b) Skriv om uttrycket $4 \sin x + 3 \cos x$ på formen $A \cos(x + \phi)$.

(3)

c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin^2 x + \sin 2x = 1.$$

(3)

Svar till uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

2.1

- a) $x = 2/9 + n/3$, där n är ett heltal.
 b) Cosinus för den tredje vinkeln är $(3\sqrt{5}-1)/8$.
 c) $x = 1/4$ eller $x = \sqrt{6}/4$.

2.2

- a) Samtliga lösningar ges av $t = \pm 1/150 + n/50$, där n är ett godtyckligt heltal.
 b) $5 \sin \omega t - 12 \cos \omega t = 13 \sin(\omega t + \phi)$ där $\phi = \arctan(-12/5) \approx -1,18$.
 c) Det största värdet är $c + \sqrt{a^2 + b^2}$ och det minsta är $c - \sqrt{a^2 + b^2}$.

2.3

- a) Lösningarna är $x = \pi(1 - 4n)/18$ och $x = \pi(4n - 1)/2$ där n är ett godtyckligt heltal.
 b) Lösningarna är $x = (-3 \pm 4)\pi/12 + 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal.
 c) Ett exakt värde är $\sin(\pi/12) = (\sqrt{2} - \sqrt{3})/2$.

2.4

- a) Lösningarna är $x = \pi/6 + n\pi/2$, där n är ett godtyckligt heltal.
 b) Vi kan skriva $g(x) = 2 \cos x (\cos^2 x - 2 \sin^2 x)$ och lösningarna är $x = \pi/2 + n\pi$, och $x = \pm \arctan(\sqrt{2}/2) + n\pi \approx \pm 0,62 + n\pi$ där n är ett godtyckligt heltal.

2.5

- a) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \pi/3)$.
 b) Lösningarna är $x = 7\pi/12 + 2\pi n$ och $x = 13\pi/12 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.
 c) $\sin(x/2) = \pm \sqrt{(1 - \cos x)/2}$, med positivt tecken om $4\pi n \leq x \leq 4\pi n + 2\pi$ för något heltal n , annars negativt.

2.6

- a) Lösningarna är $x = \pi/3 + 2\pi n/3$ och $x = \pi/2 + 2\pi n/3$, där n är ett godtyckligt heltal.
 b) Vi får att $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ och $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

2.7

- a) Lösningarna är $x = 0,28$, $x = 1,2$ och $x = 1,7$.
 b) Det finns nio lösningar till ekvationen i intervall.
 c) Amplituden är $A = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

2.8

- a) Lösningarna till ekvationen ges av $x = 5\pi/2 + 3\pi n$ och $x = 3\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal. ($150^\circ + n \cdot 540^\circ$ och $n \cdot 540^\circ$.)
 b) Den minsta positiva lösningen ges av $x \approx 2,0$.

2.9

- a) Lösningarna är $x = 11\pi/36 + 2\pi n/3$ och $x = 19\pi/36 + 2\pi n/3$, där n är ett godtyckligt heltal.
 b) Lösningarna är $x = n\pi$, $x = 2\pi/3 + 2\pi n$ och $x = 4\pi/3 + 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal. (Lösningen kan också skrivas som $x = 2\pi n/3$ och $(2n + 1)\pi$, för godtyckligt n .)
 c) Det minsta positiva tal som uppfyller kravet är $x = 180\pi/(180 + \pi)$.

2.10

- a) Lösningarna är $23\pi/24 + 2\pi n/5$ och $29\pi/24 + 2\pi n/5$, där n är ett godtyckligt heltal.
 b) Den minsta positiva lösningen är $x \approx 1,35$. ($77,3^\circ$)

- c) Lösningarna är $n\pi/2$ och $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

2.11

- a) Lösningarna ges av $x = -4\pi/15 + n\pi/2$, där n är ett godtyckligt heltal.
- b) $A = \sqrt{34} \approx 5,8$.
- c) $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.

2.12

- a) Lösningarna $t = 16\pi/3$ och $t = 17\pi/3$ är de enda i det givna intervallet.
- b) Den minsta positiva lösningen ges av $x = 2,13$ eller $x = 122^\circ$ med tre gällande siffrors noggrannhet.
- c) $A = (\sqrt{b^2 + (c-a)^2})/2$ och $B = (a+c)/2$.

2.13

- a) Lösningarna ges av $x = \pi/26 + n\pi/3$ där n är ett godtyckligt heltal.
- b) Den minsta positiva lösningen ges av $x = 1,70$ radianer.
- c) Konstanterna är $a = 2$ och $b = -4\sqrt{3}/3$.

2.14

- a) Lösningarna är $x = 2,17$, $x = 3,07$, $x = 5,31$ och $x = 6,21$, med tre gällande siffrors noggrannhet.
- b) $4 \sin x + 3 \cos x = 5 \cos(x + \phi)$, där $\phi = -\arctan(4/3) \approx -0,927$.
- c) Lösningarna är $x = \pi/2 + n\pi$ och $x = \arctan(1/2) + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.