KTH Matematik — Lösningar till tentamensskrivningen 2003-11-10,
Harald Lang — 5B1115 och 5B1135 Matematik I för I1.

1. Vi skall bevisa att likheten

$$a_n = 2^n + 1 \tag{1}$$

gäller för alla naturliga tal n. Vi vet att $a_1 = 3$ och $a_2 = 5$, så (1) är sann för $n = 1$ och $n = 2$. Vi visar nu implikationen att om (1) är sann för $n = 1, 2, \ldots, m-1$, där m är ≥ 3, så är (1) även sann för $n = m$. Men $a_m = 3a_{m-1} - 2a_{m-2}$, och om nu (1) är sann för alla naturliga tal mindre än m ("induktionsantagandet") så gäller följaktligen

$$a_m = 3\left(2^{m-1}+1\right) - 2\left(2^{m-2}+1\right) = (3-1)2^{m-1} + (3-2) = 2^m + 1$$

vilket innebär att (1) då är sann för $n = m$. Nu följer av induktionsprincipen att (1) gäller för alla naturliga tal n.

2. Definiera $u = \arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}$ och $v = \arctan 2\sqrt{2}$. Då ligger bägge dessa vinklar mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$, och $\sin u = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ och $\tan v = 2\sqrt{2}$. Vi beräknar $\tan u$:

$$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u} = \ldots (0 < u < \tfrac{\pi}{2}) \ldots = \frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{1-\frac{8}{9}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

Vi ser att $\tan u = \tan v$, och eftersom bägge dessa vinklar ligger mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$ är de lika. Alltså är $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} - \arctan 2\sqrt{2} = u - v = 0$. <u>Svar: 0.</u>

3. Vi MacLaurinutvecklar $\ln(1+x+x^2)$. Vi vet att $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + H(t)t^3$ där (H är kontinuerlig och) $H(0) = \frac{1}{3}$. Sätter vi $t = x + x^2$ får vi

$$\ln(1+x+x^2) = x + x^2 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + H(x+x^2)(x+x^2)^3$$

så

$$\frac{1}{x^3}\ln(1+x+x^2) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} - 1 - \frac{x}{2} + H(x+x^2)(1+x)^3$$

Nu är

$$\frac{1}{x^3}\ln(1+x+x^2) - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} = \frac{1-b}{x^2} + \frac{1-2a}{2x} - 1 - \frac{x}{2} + H(x+x^2)(1+x)^3$$

Om gränsvärset av detta då $x \to 0$ skall existera ser vi att det måste gälla att $a = \frac{1}{2}$ och $b = 1$. För dessa värden får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\ln(1+x+x^2) - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} = -1 + H(0) = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

<u>Svar: $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, gränsvärdet $= -\frac{2}{3}$.</u> *(Anm.: Man kan minska beteckningarna något genom att använda $\mathcal{O}$-beteckningen.)*

4. Vi har $y'(x) = \dfrac{1-x^4}{(x^4+1)^{3/2}}$. Vi beräknar gränsvärdena då $x \to \pm\infty$:

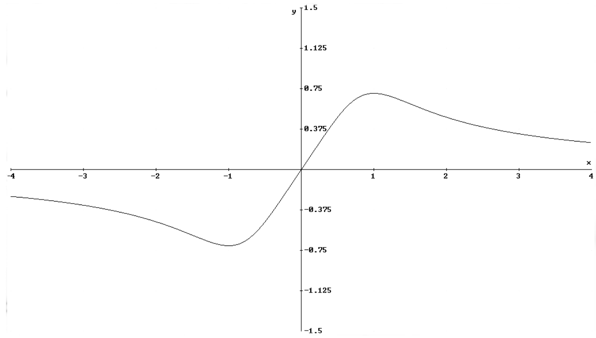
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1/x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x^4}{(x^4+1)^{3/2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1/x^4-1}{(x^{4/3}+x^{-8/3})^{3/2}} = 0$$

Vi kan nu göra en tabell över grafen:

x	$-\infty$		-1		1		∞
y'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
y	0	$\searrow$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

En graf ser ut så här



5. Funktionen $y = \frac{1}{x^3}$ är avtagande för $x > 0$. Alltså

$$\int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^3} > \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{n^3} = \frac{1}{n^3}.$$

Alltså

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^3} = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \Big[-\frac{1}{2x^2}\Big]_1^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Quad Erat Demonstrandum!

6. Implicit derivering map. x ger

$$(1+e^y)y'(x) = 1 + 2e^{2x} \quad \text{dvs.}$$

$$y'(x) = \frac{1+2e^{2x}}{1+e^y} \tag{1}$$

Nu deriverar vi (1) implicit m.a.p. x och får

$$y''(x) = \frac{4e^{2x}}{1+e^y} - \frac{1+2e^{2x}}{(1+e^y)^2} e^y y'(x) \tag{2}$$

Nu sätter vi in $x = 1$ och $y = 2$ i (1) och får

$$y'(1) = \frac{1+2e^2}{1+e^2} \tag{Svar 1}$$

och sätter vi $x = 1$ och $y = 2$ och värdet på $y'(1)$ i (2) får vi efter förenkling

$$y''(1) = \frac{e^2(3+4e^2)}{(1+e^2)^3} \tag{Svar 2}$$

7. Substituera $x = \sin t$, $dx = \cos t\, dt$. Vi låter t variera mellan $t = 0$ $(x = 0)$ och $t = \frac{\pi}{2}$ $(x = 1)$. I det intervallet är $\cos t \geq 0$, dvs. $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$. Vi får

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt \\ &= \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin t \cos t\right]_0^{\pi/2} = \underline{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

8. Vi betecknar med $V(y)$ volymen av den del av den aktuella kroppen som ligger mellan x-axeln och upp till nivån y på y-axeln. Om h är ett litet positivt tal, så kommer volymen $V(y+h) - V(y)$ som ligger mellan y-värdena $y + h$ och y att vara en tunn cirkelring med tjockleken h och yttre radien r_2 och inre radien r_1. Denna volym är alltså (approximativt) $\pi(r_2^2 - r_1^2)h$. Vi bestämmer nu r_1 och r_2 uttryckt i y. Uppenbarligen är $r_1 = y$, från kurvan $y = x$, medan r_2 bestäms av kurvan $y = \sqrt{2-x}$ som ger

$$y^2 = 2 - r_2, \quad \text{dvs.} \quad r_2 = 2 - y^2.$$

Alltså har vi

$$V(y+h) - V(y) = \pi(r_2^2 - r_1^2)h = \pi((2-y^2)^2 - y^2)h \text{ (approximativt)}$$

Dividerar vi med h och låter $h \to 0$ får vi (exakt) $V'(y) = \pi(4 - 5y^2 + y^4)$. Den sökta volymen är $V(1)$, ty de två kurvorna skär varandra för $y = 1$:

$$y = x = \sqrt{2-x} \quad \text{ger} \quad y^2 = 2 - y, \quad \text{som ger} \quad y = 1\,(\text{och}\, y = -2)$$

Den efterfrågade volymen är alltså

$$V(1) = V(1) - V(0) = \int_0^1 V'(y)\, dy = \pi \int_0^1 (4 - 5y^2 + y^4)\, dy = \underline{\frac{38\pi}{15}}$$

9. Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 9 = 0$ som har rötterna $r = \pm i3$. Den allmänna lösningen till homogena ekvationen är därför $y_h(x) = A \sin 3x + B \cos 3x$. Vi ser att högerledet i den givna ekvationen är en lösning till den homogena ekvationen; dvs. vi har "resonans". Vi ansätter därför en partikulärlösning

$$y_p(x) = ax \cos 3x + bx \sin 3x$$

som efter insättning i diff.ekvationen ger

$$\begin{aligned}6 \sin 3x &= (6b - 9ax)\cos 3x - (6a + 9bx)\sin 3x + 9(ax \cos 3x + bx \sin 3x) \\ &= 6b \cos 3x - 6a \sin 3x\end{aligned}$$

Vi ser att vi får en partikulärlösning genom att sätta $a = -1,\ b = 0$, dvs. $y_p(x) = -x\cos 3x$. Den allmänna lösningen till ekvationen är $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, dvs.:

Svar: $y(x) = A\sin 3x + (B - x)\cos 3x$ där A och B är godtyckliga konstanter.

10. Vi har

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \arctan(2\tan x) = \lim_{t\to\infty} \arctan(2t) = \frac{\pi}{2}.$$

Alltså måste vi välja $b = \frac{\pi}{2}$ för att $f(x)$ skall bli kontinuerlig från vänster i $x = \frac{\pi}{2}$.

Nu har vi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \Big(a + \arctan(2\tan x)\Big) = a + \lim_{t\to-\infty} \arctan(2t) = a - \frac{\pi}{2}.$$

För att $f(x)$ skall bli kontinuerlig från höger i $x = \frac{\pi}{2}$ måste vi alltså välja a så att $a - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, dvs. $a = \pi$. För dessa värden på a och b blir alltså funktionen kontinuerlig i intervallet.

Nu bestämmer vi f:s derivata. För $x \neq \frac{\pi}{2}$ gäller

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\arctan(2\tan x) = \frac{2 + 2\tan^2 x}{1 + 4\tan^2 x} = \frac{2\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x + 4\sin^2 x} \\ &= \frac{2}{1 + 3\sin^2 x} \qquad (1)\end{aligned}$$

Vi ser att vänster- och högerderivatan för $x = \frac{\pi}{2}$ är densamma, och eftersom $f(x)$ är kontinuerlig där, gäller (1) även där.

Svar: $a = \pi,\ b = \frac{\pi}{2},\ f'(x) = \frac{2}{1+3\sin^2 x}$ för $0 \leq x \leq \pi$