

Repetition Matematik 1

- Bestäm koefficienten vid x^2 i utvecklingen av $((1 + 2x)^5)$.
- Bestäm koefficienten vid x^2 i utvecklingen av $((\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^n)$ för $n = 1, 2, 3$.
- $a^5 \left[\frac{5a^4}{2b} + \frac{5a^3}{4b^2} \left[\frac{5a^2}{8b^3} + \frac{5a}{16b^4} \left[\frac{1}{32b^5} \right] \right] \right]$ då $a = \frac{1}{2}$ och $b = \frac{1}{3}$.
- Visa att $\binom{n}{0} \binom{n}{1} + \binom{n}{1} \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} \binom{n}{n} = 0$ där $n = 1, 2, 3, \dots$
- Visa med induktion att
 - $5^{2n+1} + 1$ är jämnt delbart med 6 för $n = 1, 2, 3, \dots$
 - $n^3 + 2n$ är jämnt delbart med 3 för $n = 1, 2, 3, \dots$
 - $n^2 < 2^n$ för $n = 5, 6, 7, \dots$
 - $1 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + \dots + (n-1)(2n-1) = (n-1)^{n+1}n$
 - $\sum_{k=1}^n \frac{2k-3}{3^k} = \frac{n}{3^n}$
- Visa att
 - $\cosh 2x = 1 + 2 \sinh^2 x$.
 - $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.
- Förenkla så långt som möjligt
 - $\sin(\arccos \frac{1}{3} - \arcsin \frac{1}{3})$
 - $\cos(2 \arccos \frac{3}{4})$
- Verifiera att
 - $2 \arctan(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$
 - $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\pi}{4}$
- Finns det något värde på konstanten A så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x^4}} & \text{då } x \neq 0 \\ A & \text{då } x = 0 \end{cases}$$
 blir kontinuerlig i punkten $x = 0$?

Svar:

1. 35
2. $n = 4 \Rightarrow 1, n = 5 \Rightarrow 10, n = 6 \Rightarrow 1$. För övriga n är koefficienten 0.
3. -1
7. a. $7/9$ b. $1/8$
9. Nej

10. Bestäm i förekommande fall inversfunktionen $f^{-1}(x)$ till den funktion $f(x)$ som anges nedan. Bestäm definitionsområdet och värdemängden till f resp. f^{-1} .
- a. $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$ b. $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$
11. Låt $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ och $g(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Bestäm de sammansatta funktionerna $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ och $g \circ g$.
12. Beräkna derivatorna till följande funktioner:
- a. $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ b. $\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ c. $x\sqrt{1+x^2}$
- d. $\sin^2(1+3x)$ e. $\frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$ f. $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$
- g. $\ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ h. $\arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}$ i. $\sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}$
- j. $\arccos \frac{1}{x}$ k. $\arctan(\tan^2 x)$
13. Beräkna höger- och vänsterderivatorna i $x=0$ till funktionen $f(x) = \sqrt{\sin^2 2x}$.
14. Beräkna derivatan $\frac{dy}{dx}$ uttryckt i x och y då funktionen $y = y(x)$ definieras av:
- a. $x^3 y + xy^3 = 1$ b. $x \cos y + y \sin x = 0$
- c. $y^y = x^3 + x$

Svar:

10. a. $f^{-1}(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$. $D_f = V_{f^{-1}} =$ alla reella tal > 1 . $D_{f^{-1}} = V_f =$ alla reella tal utom 0.
b. Har ingen invers.
11. $f \circ g(x) = (4x-1)(2x-1)$ $g \circ f(x) = (x+4)(x+2)$,
 $f \circ f(x) = (3x+2)(x+2)$ $g \circ g(x) = (3x-2)(2x-1)$.
12. a. $\frac{4}{(4-x^2)^{3/2}}$ b. $\frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$ c. $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$
- d. $3\sin(2+6x)$ e. $\frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$ f. $\frac{x}{x^4-1}$
- g. $-\frac{1}{\cos x}$ h. $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ i. $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$
- j. $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ k. $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$
13. $f_+'(0) = 2$, $f_-'(0) = -2$
14. a. $-\frac{y(3x^2+y^2)}{x(x^2+3y^2)}$ b. $\frac{y \cos x + \cos y}{x \sin y - \sin x}$ c. $\frac{(3x^2+1)}{y^y(1+\ln y)}$

21. Sök största och minsta värdet till följande funktioner:
- $\sqrt{5-4x}, -1 \leq x \leq 1$
 - $\frac{1+x^2}{1+x^4}$
 - $\frac{1-x}{3+x^2}, 0 \leq x \leq 5$
 - $\sqrt{x} - 6x \arcsin 2x - 3\sqrt{1-4x^2}$
22. Bestäm de intervall där funktionen $f(x) = \ln(1+x^4) - 2\ln(1+x^2)$ är monoton.
23. Visa att
- $\ln(1+4x^2) + \arctan 2x \geq 2\ln(1+x),$ för alla $x > -1$
 - $\sin x \leq \cos x \leq x + x^2,$ för alla $x \geq 0.$
24. Vilka värden antar $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\arctan x$ då $x > 0$?
25. Bestäm värdemängden till följande funktioner:
- $f(x) = \sqrt{6-2x} + \sqrt{x}$
 - $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}, 0 \leq x \leq 2$
 - $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$
26. Visa att funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$ har en invers.
27. Bestäm alla punkter på kurvan $y = x^4 - 8x^2 + 1$ där tangenten är parallell med x -axeln.
28. Visa att ekvationen $x^5 + x - 1 = 0$ har precis en lösning på intervallet $[-1, 1]$.
29. Låt $f(x) = \frac{x-x^2}{1+x^2} + \arctan x$. Visa att $-1 \leq \frac{\pi}{2} < f(x) \leq \frac{\pi}{4}$.
30. Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkten (1,2) och med de positiva koordinataxlarna bildar en triangel med så liten area som möjligt.
31. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 2 till följande funktioner $f(x)$:
- $x \ln(1+2x)$
 - $x \ln(1+\sin 2x)$
 - $\frac{\sqrt{1+2x}}{1-x}$
 - $e^{\sin x}$

Svar:

21. a. 1 och 3 b. Största värdet är $(1+\sqrt{2})/2$, minsta saknas
c. $1/3$ och $-1/6$ d. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ och -2π
22. Strängt avtagande då $x < -1$ eller $0 < x < 1$. Strängt växande då $-1 < x < 0$ eller $x > 1$.
24. Endast 0
25. a. $[\sqrt{3}, 3]$ b. $[1/3, 1/2]$ c. $[-1/6, 1/2]$
27. $0, \pm 2$ 30. $2x + y = 4$
31. a. $2x^2$ b. $2x^2$ c. $1 + x + x^2/2$ d. $1 + x + x^2/2$

32. Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 av funktionen

a. $f(x) = \sqrt{x}$ kring punkten $x = 1$.

b. $f(x) = x \arcsin(1 - x)$ kring punkten $x = 1$.

Restermen anges på ordoform.

33. Beräkna följande gränsvärden:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x \sin x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{(x - \frac{1}{2})^2}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x) \ln(1 + x)$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 2x)^{1/x}$

34. Bestäm de allmänna lösningen till differentialekvationen

a. $y'' - 5y' + 4y = 16x + 4$

b. $y'' - 6y' + 9y = 9x + 3$

c. $y'' - 6y' + 9y = 9x + 3 + 4e^{3x}$

d. $y'' - 2y' - 3y = (5x + 1)e^{2x}$

e. $y'' - 4y' + 3y = 10 \sin x$

f. $y'' - 2y' + y = 4x$

35. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' - 2y' - 3y = e^{1/x} \cos x$ för vilken $y(0) = 0$ och $y'(0) = 2$ och $y'(0) = 2$.

36. Sök asymptoter till följande kurvor:

a. $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

b. $y = \frac{1 + \ln(x^2 + 1)}{\ln(x + 1)}$

Svar:

32. a. $1 + (x - 1)/2 - (x - 1)^2/8 + O(x - 1)^3$ b. $-(x - 1) - (x - 1)^2 + O(x - 1)^3$

33. a. 1 b. 2
c. 1/3 d. 1/2
e. 1 f. 1/2
g. 1 h. e^2

34. a. $y = Ae^x + Be^{4x} + 4x + 6$ b. $y = Ae^{3x} + Bxe^{3x} + x + 1$
c. $y = Ae^{3x} + Bxe^{3x} + x + 1 + 2x^2e^{3x}$ d. $y = Ae^x + Be^{3x} + (x - 1)e^{2x}$
e. $y = Ae^x + Be^{3x} + 2\cos x + \sin x$ f. $y = Axe^x + Be^x + C + 8x + 2x^2$

35. $y = e^{1/x} (\cos x - \cos(x\sqrt{2}) + \sqrt{2}\sin(x\sqrt{2}))$

36. a. $x = -1, y = x - 1$ b. $x = 0, y = 2$.

37. Beräkna följande integraler:

a. $\int_3^4 \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$

b. $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-4} dx$

c. $\int_0^1 \frac{x+3}{(x-2)(x-3)^2} dx$

d. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^3} dx$

e. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x+3} dx$

f. $\int_0^1 \frac{e^x}{9-e^{2x}} dx$

g. $\int_0^1 x \ln(2-x) dx$

h. $\int_0^1 \ln(2-x) dx$

i. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(2+\sin x)(1+\sin x)} dx$

j. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

k. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

38. Beräkna följande generaliserade integraler

a. $\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)} dx$

b. $\int_0^\infty e^{-x} \sqrt{1-e^{-x}} dx$

c. $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$

d. $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx$

39. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då området

a. mellan kurvorna $y = x^2$ och $y = 2-x^2$ roterar ett varv kring x -axeln.

b. mellan kurvorna $y = x^2$ och $y = 2-x^2$ roterar ett varv kring y -axeln.

c. $0 \leq y \leq e^{\ln x}$, $0 \leq x \leq \ln 2$ roterar ett varv kring x -axeln.

d. $0 \leq y \leq e^{\ln x}$, $0 \leq x \leq \ln 2$ roterar ett varv kring y -axeln.

e. mellan linjen $y = x$ och kurvan $y = x^4 \sqrt{2-x^3}$ roterar ett varv kring x -axeln.

Svar:

37. a. $\ln 3$

b. $1 - (5/4)\ln 3$

c. $1 - 10\ln 2 + 5\ln 3$

d. $2/9$

e. $2\sqrt{3} - 4 \arctan(\sqrt{3}/2)$

f. $(\ln(3+e) - \ln(3-e) - \ln 2)/6$

g. $2\ln 2 - 5/4$

h. $2\ln 2 - 1$

i. $2\ln 2 - \ln 3$

j. $\pi/6$

k. $\pi/4$

38. a. $\ln 2/2$

b. $2/3$

c. π

d. $1/3$

39. a. $16\pi/3$

b. π

c. $3\pi/8$

d. $\pi(1 - \ln 2)$

e. $(4\sqrt{2} - 5)\pi/9$

40. Bestäm längden av kurvan följande kurvor

- $5y = 4x^{5/4}, 0 \leq x \leq 9$
- $y = e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$
- $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}, 0 \leq x \leq 1$
- $x = \cos t + (t - 1)\sin t, y = \sin t - (t - 1)\cos t, 0 \leq t \leq 2$
- $x = 3\cos 2t - 2\cos 3t, y = 3\sin 2t - 2\sin 3t, 0 \leq t \leq \pi$
- $r = \sin v + \cos v, 0 \leq v \leq \pi$ (polära koordinater)
- $r = 1 + \sin v, 0 \leq v \leq 2\pi$ (polära koordinater)

41. Beräkna arean av det ändliga området som begränsas av kurvan

- $y = (x - 5)\sqrt{6 - x}$ och x -axeln.
- kurvorna $y = 4x^2 - 3x + 1$ och $y = x^3 + 1$.
- linjen $y = 2x$ och $y = x\sqrt{9 - 5x^2}$
- $y^2 = (1 - x)x^2, 0 \leq x \leq 1$
- $y^2 = x$ och $y = x^2$

42. Undersök konvergens av följande serier

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17n}{18n^4+1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}+3}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+3}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+3^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{2n}$

Svar:

- | | | | | |
|-----|----------------|-------------------------|---------------|----------------|
| 40 | a. 232/15 | b. $1 + \ln \sqrt{3/2}$ | c. 47/15 | d. 1 |
| | e. 24 | f. $\pi\sqrt{2}$ | g. 8 | |
| 41. | a. 4/15 | b. 37/12 | c. 8/15 | d. 8/15 |
| | e. 1/3 | | | |
| 42. | a. divergent. | b. konvergent. | c. divergent. | d. konvergent. |
| | e. konvergent. | f. konvergent. | g. divergent. | h. konvergent |

43. Undersök konvergensen av följande generaliserade integraler:

a. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} dx$

b. $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

c. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx$

d. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1 - x^2} dx$

44. Skriv $\frac{(2+i)(3+i)}{4-i}$ på formen $a + ib$.

45. Bestäm absolutbeloppet av $\frac{(3-2i)(1-i)}{(2+i)^2}$.

46. Bestäm argumentet för $\frac{(3+i\sqrt{3})^4}{(1-i)^8}$.

47. Skriv $e^{3\pi/2}$ på formen $a + ib$.

48. Lös ekvationen $z^4 = 1$.

49. Lös ekvationen $z^3 - iz^2 - z + i = 0$, då man vet att $z = i$ är en rot.

50. Ekvationen $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$ har en rot $z = -1 + i$. Bestäm samtliga rötter.

51. Ekvationen $z^4 + 3z^3 + z^2 + 18z - 30 = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen.

52. Bestäm de reella talen a och b så att ekvationen $z^3 + az + b = 0$ får roten $z = 1 - 2i$. Lös ekvationen.

53. Uppdel $x^4 + 1$ så långt som möjligt i reella faktorer.

Svar:

43. a. konvergent.

b. konvergent.

c. divergent.

d. konvergent.

44. $\frac{15}{17} + \frac{25}{17}i$

45. $\sqrt{26}/5$

46. $2\pi/3$.

47. $-i$

48. $1, i, -1, -i$.

49. $i, 1, -1$

50. $-1+i, -1-i, i, -i$

51. $i\sqrt{6}, -i\sqrt{6}, 3/2 + \sqrt{29}/2, 3/2 - \sqrt{29}/2$

52. $a = 1, b = 10, z_2 = 1 + 2i, z_3 = -2$.

53. $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$