

Ordentligt redovisade lösningar fordras. Varje uppgift ges 0–2 poäng. För 1 bonuspoäng fordras 7p, för 2 bonus 10p.

1. Visa med induktion att

$$\frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

2. Bestäm talen a , b , c så att

$$n^3 = a \binom{n}{3} + b \binom{n}{2} + c \binom{n}{1}.$$

Använd sedan denna relation och sambandet

$$\sum_{n=1}^N \binom{n}{k} = \binom{N+1}{k+1}$$

för att bestämma ett uttryck för

$$\sum_{n=1}^N n^3$$

Detta uttryck skall inte innehålla binomialkoefficienter.

3. Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$\arcsin\left(\frac{3}{2}x\right) = 2 \arctan x$$

i intervallet $0 < x < 2/3$.

4. Vi definierar funktionen $f(x)$ genom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x} & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

Använd definitionen av derivata för att bestämma $f'(0)$.

5. Funktionen $y = y(x)$ definieras för $-1 < x < 1$ genom

$$y + (1+x) \ln(1+y) = \arcsin x$$

Verifiera att $y(0) = 0$, och bestäm derivatan $y'(0)$.

6. Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$$f(x) = (1-x)e^{-x}$$

i intervallet $0 \leq x < \infty$. Glöm inte att undersöka $f(x)$ då $x \rightarrow \infty$.