

Detta är kommentarer till lektionslärarna om hur jag behandlar cyklometrisk funktioner. Jag tror det här avsnittet är ganska svårt för studenterna, så det kan vara lämpligt att vi inte rör till det för dem genom att använda olika metoder. Trots det avviker jag från bokens behandling, som jag tror uppfattas som svår. I första hand, gör på samma sätt som jag; om ni avviker, så var åtminstone medvetna om att jag gjort annorlunda på föreläsningen.

Jag använder konsekvent att $u = \arcsin x$ är ekvivalent med $\sin u = x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ osv. och inför beteckningar för $\arcsin$ osv. och räknar på trig-funktionssidan. Jag visar hur jag gör exempel 2.22 och 2.23 i boken:

2.12 *Förenkla* $\arcsin \frac{4}{5} - \arctan \frac{1}{7}$.

Lösning: vi inför $u = \arcsin \frac{4}{5}$ och $v = \arctan \frac{1}{7}$. Det är då klart att både u och v ligger i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. Uppgiften är att beräkna $u - v$, som alltså kommer att ligga i intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Vi ser ur en rätvinklig triangel med sidorna 3, 4, 5 att $\tan u = \frac{4}{3}$, alltså har vi

$$\tan(u - v) = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{7}} = 1$$

Eftersom vi vet att $u - v$ ligger i intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ får vi alltså att $\arcsin \frac{4}{5} - \arctan \frac{1}{7} = u - v = \frac{\pi}{4}$.

2.13 *Lös ekvationen* $\arccos x = \arctan x$

Lösning: Definiera u genom $u = \arccos x = \arctan x$. Det följer av definitionerna att u ligger i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$. (Detta förutsätter att det finns någon lösning ö.h.t. men det ser man enkelt i ett diagram – alternativt ”satsen om mellanliggande värden”, men dit har vi ju inte kommit ännu.)

Vi har alltså $x = \cos u$ och $x = \tan u$. Vi söker nu u :

$$\cos u = \tan u \Leftrightarrow \cos^2 u = \sin u \Leftrightarrow 1 - \sin^2 u = \sin u \Leftrightarrow \sin u = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Nu ligger emellertid u i intervallet $(0, \frac{\pi}{2})$, så vi måste ha $\sin u = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Nu får vi

$$x = \cos u = [\text{se ovan}] = \sqrt{\sin u} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

För mig framstår detta som enklare och mer naturligt än Eikes framställning. Framför allt återför man räkningarna till de mer bekanta trigonometriska funktionerna.

Harald