KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 2003-12-01
5B1135 Matematik I för Öppen1
Lösningsförslag.

1. Binomialteoremet ger

$$\left(\frac{1}{x}+x^2\right)^{12}=\sum_0^{12}\binom{12}{k}x^{-k}x^{2(12-k)}$$

x^0-termen får vi för $k=8$, och konstanttermen är alltså

$$\binom{12}{8}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2}=\underline{\underline{495.}}$$

2. Det enklaste är att substituera $\sqrt{x}=t$. Då gäller $t\to 0$ då $x\to 0+$, alltså, med användning av L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\left[\frac{”0”}{0}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t}$$
$$=\left[\frac{”0”}{0}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

3. Derivation m.a.p. x ger

$$y'(x)e^{y(x)}+y(x)e^{y(x)}y'(x)=1$$
$$y'(x)=\frac{1}{e^y(1+y)}$$

Ur sambandet $ye^y=x$ ser vi att $x=e$ svarar mot $y=1$, alltså

$$y'(e)=\frac{1}{e^1(1+1)}=\underline{\underline{\frac{1}{2e}}}.$$

4. Karakteristiska ekvationen är $r^2+2r+1=0$ som har dubbelroten $r=-1$. Alltså är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y_h(x)=(Ax+B)\,e^{-x}$.

Vi ansätter nu $y_1(x)=ae^{-2x}$ som lösning till ekvationen med högerledet e^{-2x} och får

$$ae^{-2x}=e^{-2x}$$

dvs. $a=1$ duger.

Nu ansätter vi $y_2(x) = b\cos x + c\sin x$ som lösning till ekvationen med högerledet $\sin x$ och får

$$2c\cos x - 2b\sin x = \sin x$$

dvs. $c = 0$, $b = -\frac{1}{2}$ duger; alltså $y_2(x) = -\frac{1}{2}\cos x$.

Allmänna lösningen till differentialekvationen är alltså

$$\underline{\underline{y(x) =}}\, y_h(x) + y_1(x) + y_2(x) = \underline{\underline{(Ax+B)\,e^{-x} + e^{-2x} - \frac{1}{2}\cos x.}}$$

5. Det enklaste är att hänvisa till att $\ln x$ är konkav: $\frac{d^2}{dx^2}\ln x = \frac{-1}{x^2} < 0$. Högerledet är kordan mellan $x = 1$ och $x = e$ på grafen till $y = \ln x$. Olikheten följer av att kordan ligger under grafen för en konkav funktion.

Annars kan man göra så här: Låt $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{e-1}$. Vi har $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e-1}$ och $f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$. Alltså är $f'(x)$ avtagande, och $f'(e-1) = 0$. Teckendiagram:

x	1		$e-1$		e
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Av detta framgår att $f(x) \geq 0$ i intervallet $1 \leq x \leq e$; *Q.E.D.*

6. Substitutionen $\tan\frac{x}{2} = t$ ger $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$. Dessutom är $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Alltså:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2\,dt}{1-t^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= \left[\ln\left(\tfrac{1+t}{1-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\left(\tfrac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}}\right) = \underline{\underline{\ln(2+\sqrt{3}).}}\end{aligned}$$

7. Med användning av kända MacLaurinutvecklingar av sin och cos får vi:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3} + x^2\right) &= \sin(\frac{\pi}{3})\cos(x^2) + \cos(\frac{\pi}{3})\sin(x^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x^2) + \frac{1}{2}\sin(x^2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \mathcal{O}(x^8)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \mathcal{O}(x^{10})\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^6 + \mathcal{O}(x^8).}}\end{aligned}$$

8. Vi delar upp integranden i partialbråk:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x+2x^2} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{1+2x}\right) dx = \Big[\ln x - \ln(1+2x)\Big]_1^\infty$$
$$= \Big[\ln\Big(\frac{x}{1+2x}\Big)\Big]_1^\infty = \ln(\tfrac{1}{2}) - \ln(\tfrac{1}{3})$$
$$= \underline{\underline{\ln(\tfrac{3}{2}).}}$$

9. I formeln för partiell integration ingår en obestämd integral i vardera ledet:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Nu är ju en obestämd integral bara bestämd så när som på en additiv konstant; konstanterna i höger och vänsterledet måste väljas så att de passar ihop. I det aktuella fallet kan vi skriva

$$\int 1\,\frac{1}{x}\,dx = 1 - \int x\Big(\frac{-1}{x^2}\Big)\,dx = 1 + \int 1\,\frac{1}{x}\,dx$$

dvs.
$$\ln x + C_1 = 1 + \ln x + C_2$$

Här måste vi tydligen välja C_1 och C_2 så att $C_1 - C_2 = 1$.

10. Låt $F(x)$ beteckna en primitiv funktion till e^{-x^2}, dvs. $F'(x) = e^{-x^2}$. Nu kan vi skriva

$$\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt = F(2x) - F(x).$$

Vi deriverar m.a.p. x:

$$\frac{d}{dx}\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt = F'(2x)\cdot 2 - F'(x) = \underline{\underline{2e^{-4x^2} - e^{-x^2}.}}$$